

**2026年度春入学
大阪公立大学大学院理学研究科
博士前期課程・数学専攻
筆答試験問題（専門基礎分野）**

数学専攻受験者に対する注意事項

- (1) 専門基礎分野の問題は 1 ページ～2 ページにあります。
- (2) 3 題すべてに解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、6 枚配布します。
- (4) 解答は、問題ごとに 2 枚の解答用紙を用い、枠内に記入して下さい。解答用紙のすべてに、受験番号、氏名および問題番号を記入して下さい。また、問題ごとに何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (5) 配点は、各問題とも 50 点です。
- (6) 試験時間は、9:30～12:00 です。
- (7) 解答用紙は、解答欄が白紙のものを含め、すべて提出して下さい。
- (8) 本試験問題の一部あるいは全部について、いかなる方法においても複写・複製など、著作権法上で規定された権利を侵害する行為を行うことは禁じられています。

専門基礎の問題

次の数学 I-1 ～数学 I-3 の問題全てに解答せよ.

数学 I-1 行列 A を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ.

- (1) 実数を成分とする 3 次正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列となるものを 1 つ求めよ.
- (2) 正の整数 n に対して, $B_n = A^n + A + 2E$ とおく. ここで E は 3 次単位行列とする.
(1) で求めた P に対して, $P^{-1}B_5P$ を求めよ.
- (3) (2) の B_n が逆行列を持つような正の整数 n をすべて求めよ.

数学 I-2 次の各問いに答えよ.

- (1) 累次積分 $\int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 ye^{x^2} dx \right) dy$ の値を求めよ.
- (2) $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$ に対して $f_k(x) = k \sin\left(\frac{x}{k}\right)$ とおく.
 - (a) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ を求めよ.
 - (b) (a) で求めた極限関数を f とする. 関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は \mathbb{R} 上で f に一様収束しないことを示せ.
 - (c) 任意の正の実数 R に対し, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は区間 $I = [-R, R]$ 上で f に一様収束することを示せ.

数学 I-3 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の部分集合 X を

$$X = \{(\cos u, \sin u, v) \mid 0 \leq u < 2\pi, -1 < v < 1\}$$

により定義し、 \mathbb{R}^3 の部分空間としての位相を与える。 X 上の同値関係 \sim を、 $a, b \in X$ に対して「 $a \sim b \Leftrightarrow a = b$ または $a = -b$ 」により定め、この同値関係に関する X の商位相空間を Y 、自然な射影を $p: X \rightarrow Y$ とする。また、 $0 \leq r < 1$ を満たす実数 r に対し、 X の部分集合 A_r を

$$A_r = \{(\cos u, \sin u, v) \mid 0 \leq u < 2\pi, -r \leq v \leq r\}$$

により定義し、 $B_r = p(A_r)$ とする。次の各問いに答えよ。

- (1) $X - A_0$ は連結でないことを示せ。
- (2) $0 \leq r < 1$ に対し、 B_r はコンパクトであることを示せ。
- (3) $0 \leq r < 1$ に対し、 $Y - B_r$ は連結であることを示せ。
- (4) X のコンパクト部分集合の列 $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ に対し、 X がそれらの内部の和集合 (すなわち $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_n$) となるとき、 $A_0 \subset K_n$ を満たす n が存在することを示せ。
- (5) X のコンパクト部分集合 K が A_0 を含むとき、 $X - K$ は連結でないことを示せ。
- (6) X と Y は同相でないことを示せ。