

**2026年度春入学
大阪公立大学大学院理学研究科
博士前期課程・数学専攻
筆答試験問題（専門分野）**

数学専攻受験者に対する注意事項

- (1) 専門分野の問題は1ページ～7ページにあります。
- (2) 数学II-1～数学II-13の問題の中から3題を選択して解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、6枚配布します。
- (4) 解答は、問題ごとに2枚の解答用紙を用い、枠内に記入して下さい。解答用紙のすべてに、受験番号、氏名および問題番号を記入して下さい。また、問題ごとに何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (5) 配点は、各問題とも50点です。
- (6) 試験時間は、13:00～15:30です。
- (7) 解答用紙は、解答欄が白紙のものを含め、すべて提出して下さい。
- (8) 本試験問題の一部あるいは全部について、いかなる方法においても複製・複製など、著作権法上で規定された権利を侵害する行為を行うことは禁じられています。

専門分野の問題

次の数学 II-1 ～ 数学 II-13 の問題の中から 3 題を選択して解答せよ（4 題以上解答しないこと）。解答用紙に選択した問題の番号を書き忘れないように注意せよ。

数学 II-1 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ を位数 2 の有限体とする。集合 $G = \mathbb{F}_2^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{F}_2\}$ に演算 $*$ を次で定める：

$$(a, b, c) * (d, e, f) = (a + d, b + e + af, c + f) \quad (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_2).$$

次の各問いに答えよ。

- (1) G は演算 $*$ に関して群になることを示せ。
- (2) 元 $\sigma = (1, 0, 1) \in G$ の位数を求めよ。
- (3) G はアーベル群か。理由とともに答えよ。
- (4) G を群として生成する 2 つの元 α, β を 1 組求めよ。

数学 II-2 この問題では、環とは、結合的可換環であり、0 とは異なる単位元を持つものを意味する。また、環 R の元 $r \in R$ に対して r の生成するイデアルを (r) と表す。すなわち

$$(r) = \{sr \in R \mid s \in R\}.$$

次の各問いに答えよ。

- (1) 多項式環 $\mathbb{R}[x]$ のイデアル $(x^2 + 1)$ による剰余環 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ は複素数体 \mathbb{C} と同型であることを示せ。
- (2) R を環とし、 I, J を R のイデアルとする。このとき $I \cap J$ が素イデアルならば $I \subset J$ または $J \subset I$ が成り立つことを示せ。
- (3) R を単項イデアル整域とする。 R の 0 でない元 x, y に対して、次の 2 条件は同値であることを示せ：
 - (a) $(x) + (y) = R$,
 - (b) $(xy) = (x) \cap (y)$.
- (4) R は環であり、 R と異なる任意の R のイデアルが素イデアルであるとする。このとき R は体であることを示せ。

数学 II-3 K を標数 0 の体, n を正の整数とし, 1 の原始 n 乗根 ζ が K に含まれるとする. K の元 t を固定する. 多項式 $P(X) = X^{2n} - 2tX^n + 1$ が K 上既約であると仮定し, L を $P(X)$ の K 上の最小分解体とする. 次の各問いに答えよ.

- (1) $P(X) = 0$ の解を t と ζ と根号を使って表せ.
- (2) $\alpha \in L$ を $P(X) = 0$ の解の 1 つとする. L の K 上の自己同型 σ で $\sigma(\alpha) = \zeta\alpha$ を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ.
- (3) (2) の σ に対し, L の部分体 $M = \{b \in L \mid \sigma(b) = b\}$ を求めよ.
- (4) $n \geq 3$ のとき, L/K はアーベル拡大ではないことを示せ.
- (5) $n = 2$ のとき, L/K の中間体をすべて求めよ.

数学 II-4 実数 R は $0 < R < 1$ を満たすものとする. \mathbb{R}^3 の原点を中心とする半径 1 の球面を S^2 で表す. S^2 上の 2 つの小円とそれぞれの小円が囲む小さい方の閉領域を

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 = \sqrt{1 - R^2} \right\} \\ C_2 &= \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_2 = \sqrt{1 - R^2} \right\} \\ D_1 &= \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_1 \geq \sqrt{1 - R^2} \right\} \\ D_2 &= \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_2 \geq \sqrt{1 - R^2} \right\} \end{aligned}$$

で定義する. 次の各問いに答えよ.

- (1) C_1 の各点における測地曲率を求めよ. ただし, C_1 の向きは, x_1 軸の正の方向から見て左回りとなるよう定める.
- (2) D_1 の面積を求めよ.
- (3) C_1 と C_2 が 2 点で交わり, その 2 点を結ぶ線分が, S^2 に内接するある立方体の 1 辺となっているときの R の値を求めよ.
- (4) (3) のとき, $D_1 \cap D_2$ の面積を求めよ.
- (5) (3) のとき, C_1 と C_2 が成す小さい方の角を求めよ.

数学 II-5 次の各問いに答えよ.

- (1) M_1, M_2 は C^∞ 級多様体, $m_2 \in M_2$ とする. 定値写像

$$f: M_1 \rightarrow M_2, \quad f(p) = m_2 \quad (p \in M_1)$$

は C^∞ 級写像であることを示せ.

- (2) $f: M_1 \rightarrow M_2$ を (1) の定値写像とする. 任意の $m_1 \in M_1$ に対し, f の m_1 における微分 $(df)_{m_1}$ は零写像であることを示せ.
- (3) M_1, M_2, M_3 は C^∞ 級多様体, $f_1: M_1 \rightarrow M_2, f_2: M_2 \rightarrow M_3$ は C^∞ 級写像とする. 合成写像 $f_2 \circ f_1$ が定値写像であるとき, 任意の $m_1 \in M_1$ に対し,

$$\text{Im}(df_1)_{m_1} \subset \text{Ker}(df_2)_{f_1(m_1)}$$

が成り立つことを示せ.

数学 II-6 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とし, $X = \{(x, y, z) \in S^2 \mid xyz = 0\}$ と定める. 次の各問いに答えよ.

- (1) $Y = \{(x, y, z) \in X \mid z \leq 0\}$ とする. 単体的複体 K でその多面体 $|K|$ が Y と同相であるものを 1 つ与えよ. なお, $|K|$ と Y が同相であることの証明は述べなくともよい.
- (2) (1) で与えた単体的複体 K のオイラー標数 $\chi(K)$ を求めよ.
- (3) X 上の同値関係 \sim を

$$p \sim q \iff p = \pm q \quad (p, q \in X)$$

により定め, $Z = X/\sim$ と定める. 単体的複体 L であってその多面体 $|L|$ が Z と同相であるものを 1 つ与えよ. なお, $|L|$ と Z が同相であることの証明は述べなくともよい.

- (4) (3) で与えた単体的複体 L の整係数ホモロジー群 $H_d(L)$ ($d \in \mathbb{Z}$) を求めよ.

数学 II-7 2次元多様体 T と, T を境界に持つ 3次元多様体 V を

$$T = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w| = 1\}$$

$$V = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = 1, |w| \leq 1\}$$

により定義する. また, $x_0 = (1, 1) \in \mathbb{C}^2$ とする. 次の各問いに答えよ.

- (1) 基本群 $\pi_1(T, x_0)$ および $\pi_1(V, x_0)$ を求めよ. ただし, 円周の基本群が無限巡回群と同型であることは認めてよい.
- (2) 包含写像 $\iota: T \rightarrow V$ が誘導する準同型写像 $\iota_*: \pi_1(T, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ の核と像を求めよ.
- (3) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とし, 写像 $f: \partial D \rightarrow T$ を $f(e^{si}) = (e^{3si}, e^{4si})$ ($0 \leq s < 2\pi$) で定める. ただし, i は虚数単位とする. ∂D 上の各点 z と $\partial V = T$ 上の点 $f(z)$ を同一視して得られる位相空間 $V \cup D/f$ の基本群を求めよ.

数学 II-8 $0 < \alpha < 1$ として, 複素関数

$$f(z) = \frac{e^{(\alpha-1)\log z}}{z+1}$$

について考える. ただし, 複素対数関数 $\log z$ の分枝は $0 < \arg z < 2\pi$ なるものとする. また, i は虚数単位とする. 次の各問いに答えよ.

(1) $z = -1$ における $f(z)$ の留数を求めよ.

(2) $r > 0, r \neq 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ をみたす r と φ を取り, 複素平面内の曲線 $C_{r,\varphi}$ を

$$C_{r,\varphi} : z = re^{i\theta} \quad (\varphi \leq \theta \leq 2\pi - \varphi)$$

で定める. 不等式

$$\left| \int_{C_{r,\varphi}} f(z) dz \right| \leq \frac{2\pi r^\alpha}{|r-1|}$$

を示せ.

(3) $0 < \varepsilon < 1 < R, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ をみたす ε, R, φ を取り,

$$\Omega_{\varepsilon,R,\varphi} = \{z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < |z| < R, \varphi < \arg z < 2\pi - \varphi\}$$

とおく. $\Omega_{\varepsilon,R,\varphi}$ の境界に沿った f の積分を用いて, 等式

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

を導け.

数学 II-9 関数 $x(t)$ に対して $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ と表す. 次の各問いに答えよ.

(1) K を非負定数とする. 区間 $[t_0, t_1]$ 上で定義された非負値連続関数 $\lambda(t), v(t)$ が

$$v(t) \leq K + \int_{t_0}^t \lambda(s)v(s)ds \quad (t \in [t_0, t_1])$$

を満たすとき,

$$v(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t \lambda(s)ds\right) \quad (t \in [t_0, t_1])$$

が成り立つことを示せ.

(2) 関数 $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続で, 適当な非負定数 L について

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad (t \geq 0, y, z \in \mathbb{R})$$

を満たすとする. また, $x_0 \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 初期値問題

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad (t > 0); \quad x(0) = x_0$$

の解は一意であることを示せ.

(3) $g(y) = |y|^{1/2}$ ($y \in \mathbb{R}$) とするとき, 初期値問題

$$x'(t) = g(x(t)) \quad (t > 0); \quad x(0) = 0$$

の解は一意的でないことを示せ.

数学 II-10 複素数列 $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ で $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ が有限なもの全体からなる数列空間を ℓ^1 と書く. この ℓ^1 はノルム $\|\cdot\|_1$ に関してバナッハ空間であることが知られている. 線型作用素 $P_n : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ ($n = 1, 2, \dots$) を

$$x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^1 \text{ に対して } P_n x = (y_k)_{k=1}^{\infty}, \quad y_k = \begin{cases} x_k & (1 \leq k \leq n), \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

と定義する. さらに ℓ^1 全体で定義された線型作用素 $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ をひとつ定め, T と P_n の作用素としての積 $P_n T$ を T_n と書く. 次の各問いに答えよ.

- (1) 作用素列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ は T に強収束することを示せ.
- (2) T が有界作用素であるとき, すべての $n = 1, 2, \dots$ について T_n は有界作用素であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\text{op}} = \|T\|_{\text{op}}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\|\cdot\|_{\text{op}}$ は作用素ノルムを表す.

- (3) すべての $n = 1, 2, \dots$ について T_n が有界作用素であるとき, 次の (i), (ii) を示せ.
 - (i) $\sup\{\|T_n\|_{\text{op}} \mid n = 1, 2, \dots\} < \infty$.
 - (ii) T は有界作用素である.

数学 II-11 $1 < p < \infty$ とする. \mathbb{R} 上でルベーグ測度に関して p 乗可積分な関数の全体のなす空間を L^p とし, $f \in L^p$ に対して

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

と定める. ただし, $\int \dots dx$ はルベーグ測度に関する積分である. 次の各問いに答えよ.

- (1) $f \in L^p$ と $g \in L^{p'}$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

が成り立つことを示せ. ただし p' は p のヘルダー共役指数, つまり $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, である.

(2) K は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数であり,

$$A = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x, y)| dy < \infty, \quad B = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |K(x, y)| dx < \infty$$

を満たすとする. $f \in L^p$ に対して

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$$

とおくとき,

$$\|u\|_{L^p} \leq A^{1/p'} B^{1/p} \|f\|_{L^p}$$

が成り立つことを示せ.

数学 II-12 確率変数 U_1, U_2 は开区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に互いに独立に従うとし,

$$X = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2),$$

$$Y = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)$$

とする. さらに

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$W = 2\pi U_2$$

とする. 次の各問いに答えよ.

(1) R の周辺確率密度関数 $f_R(r)$ を求めよ.

(2) (R, W) の同時確率密度関数 $f_{R,W}(r, w)$ を求めよ.

(3) \mathbb{R}^2 の部分集合 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ から \mathbb{R}^2 への写像 $(x, y) \mapsto (r, w)$ を

$$\begin{pmatrix} r \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$$

で定義する. このとき, ヤコビ行列式 $\frac{\partial(r, w)}{\partial(x, y)}$ を求めよ. ただし, Tan^{-1} は \tan の逆関数の主値である.

(4) (X, Y) の同時確率密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ を求めよ.

数学 II-13 $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ を母数 $\theta > 0$ の指数分布に従う母集団からの無作為標本とする, すなわち, X_1, X_2, \dots, X_n は互いに独立で, 各 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) の確率密度関数は

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{\theta} x\right) & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で与えられる. 次の各問いに答えよ.

- (1) X_1 の期待値 $E[X_1]$ と分散 $V[X_1]$ を求めよ.
- (2) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ とし, $x_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ とする. $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ を観測したとき, θ の対数尤度関数 $\log L(\theta)$ を求めよ. さらに, 対数尤度関数 $\log L(\theta)$ を θ について最大化することにより, θ の最尤推定値 $\hat{\theta}(\boldsymbol{x})$ を求めよ.
- (3) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ は θ の不偏推定量であることを示せ.
- (4) \boldsymbol{X} がもつ θ のフィッシャー情報量 $I_{\boldsymbol{X}}(\theta)$ を求めよ.
- (5) θ の不偏推定量に関するクラメール・ラオの不等式を与えよ.
- (6) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}(\boldsymbol{X})$ は θ の有効推定量であることを示せ.