大阪公立大学 大学院理学研究科
数学専攻 博士前期課程
2026年度春入学 一般選抜 第2次募集
筆記試験（専門科目）問題冊子

数学専攻受験者に対する注意事項

1. 数学専攻の専門科目の問題は，1ページ 〜 4ページにあります.
2. 数学 1〜数学 4 の問題の中から2題を選択して解答して下さい．3題以上を選択しないで下さい.
3. 解答用紙は，6枚配付します.
4. 解答は，問題ごとに3枚の解答用紙を用い，解答欄の枠内に記入して下さい．すべての解答用紙に受験番号と問題番号を記入して下さい．また，問題ごとに全3枚中の何枚目かを記入して下さい.
5. 試験時間は，9:30 〜 12:00です.
6. 解答用紙は，解答欄が白紙のものを含め，すべて提出して下さい.
7.

専門科目の問題

次の $\boxed{\text{数学 1}}$ 〜 $\boxed{\text{数学 4}}$ の問題の中から 2 題を選択して解答せよ．3 題以上を選択してはならない．解答用紙に問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

$\boxed{\text{数学 1}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

とおく．A に対して $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への 1 次変換 T を $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定める．

次の各問いに答えよ．

(1) T の固有値をすべて求めよ．

(2) T の固有空間の基底を固有値ごとに 1 組求めよ．

(3) 次で与えられる $\mathbf{v}$ は，T のすべての固有値の集合を添字集合として和を取った固有空間の和空間に属することを示せ：

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(4) 自然数 n に対して $T^n(\mathbf{v})$ を求めよ．

$\boxed{\text{数学 2}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $0 < \delta < 1$ に対して $D_\delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく．

$$\lim_{\delta \to +0} \iint_{D_\delta} \frac{xy}{(x^2 - xy + y^2)^\alpha} \, dxdy$$

が収束するための実数 α の条件を求めよ．

(2) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(x,y) = e^y \sin(\pi x) - \sin(3y)$ とおく．点 $(1,0)$ の近傍において $f(x,y) = 0$ から定まる陰関数を $y = \varphi(x)$ とするとき，$\varphi'(1)$ および $\varphi''(1)$ の値を求めよ．

(3) 区間 $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ を

$$f_0(x) = x,$$
$$f_n(x) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{3}]}(x) f_{n-1}(3x) + \mathbf{1}_{(\frac{1}{3},1]}(x) + \mathbf{1}_{[\frac{2}{3},1]}(x) f_{n-1}(3x-2)\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

によって帰納的に定める．ただし，集合 S に対して $\mathbf{1}_S(x)$ は，$x \in S$ のとき 1，$x \notin S$ のとき 0 となる関数を表す．次の (i)，(ii) を示せ．

(i) $k = 1, 2, \ldots$ に対して，$M_k = \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|$ とおくと，$M_{k+1} \leq \dfrac{M_k}{2}$．

(ii) $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ はある関数に $[0,1]$ 上で一様収束する．

$\boxed{\text{数学 3}}$ (X,d) を距離空間とし，$\mathcal{C}$ をその空でないコンパクト部分集合全体からなる集合族とする．$a \in X$ と $B \in \mathcal{C}$ に対して，$d(a,B) = \inf\{d(a,b) \mid b \in B\}$ と定義する．また，$A, B \in \mathcal{C}$ に対して，$\delta(A,B) = \sup\{d(a,B) \mid a \in A\}$, $d_H(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$ と定義する．

次の各問いに答えよ．

(1) $a \in X$ と $B \in \mathcal{C}$ に対して，写像 $f : B \to \mathbb{R}$ を $f(x) = d(a,x)$ $(x \in B)$ により定義する．この写像は連続であることを示せ．

(2) $a \in X$ と $B \in \mathcal{C}$ に対して，$a \in B$ と $d(a,B) = 0$ とは同値であることを示せ．

(3) $B \in \mathcal{C}$ に対して，写像 $g_B : X \to \mathbb{R}$ を $g_B(x) = d(x,B)$ $(x \in X)$ により定義する．この写像は連続であることを示せ．

(4) d_H は $\mathcal{C}$ 上の距離関数であることを示せ．

(5) X を数直線 $\mathbb{R}$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n \in \mathcal{C}$ を $A_n = \{k/n \mid k = 0, 1, \ldots, n\}$ により定義する．距離空間 $(\mathcal{C}, d_H)$ 内の点列 $\{A_n\}$ が収束するかどうか答えよ．

$\boxed{\text{数学 4}}$ 同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上に独立な実数値確率変数 X と Y が与えられているとする．確率変数 X は指数分布 $\mathsf{Ex}(1/\lambda)\,(0 < \lambda < \infty)$ に従い，確率変数 Y は指数分布 $\mathsf{Ex}(1/\sigma)\,(0 < \sigma < \infty)$ に従うとする．ただし，$\mathsf{Ex}(1/\theta)$ $(0 < \theta < \infty)$ の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

で与えられるとする．さらに

$$Z = \min\{X, Y\}, \quad W = \begin{cases} 1, & Z = X \\ 0, & Z = Y \end{cases}$$

と定義する．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) Z の累積分布関数 F_Z を求めよ．

(2) W の累積分布関数 F_W を求めよ．

(3) Z と W の同時分布関数 $F_{Z,W}$ を求めよ．

(4) Z と W は独立であるかどうか，理由を含めて答えよ．

(5) 同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上で定義された実数値確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立で，各 $X_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ は X と同じ確率分布に従うとし，

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

と定める．このとき，$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ は λ^{-1} に確率収束することを示せ．ただし，同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{Pr})$ 上で定義された実数値確率変数列 $V, V_1, V_2, \ldots$ に対して，確率変数列 $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ が確率変数 V に確率収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{Pr}(|V_n - V| > \varepsilon) = 0$$

が成立することをいう．