令和４年度
大阪公立大学大学院理学研究科
博士前期課程（修士課程）・数学専攻
筆答試験問題（専門基礎分野）

数学専攻受験者に対する注意事項

(1) 数学専攻の専門基礎分野の問題は 1 ページ〜2 ページにあります.
(2) 4 題全てに解答して下さい.
(3) 解答用紙は，8 枚配布します.
(4) 解答は，<u>問題ごとに 2 枚の解答用紙を用い</u>，枠内に記入して下さい．解答用紙の<u>全てに</u>，受験番号，氏名および問題番号を記入して下さい．また，<u>問題ごとに</u>何枚中の何枚目かを記入して下さい.
(5) 配点は，各問題とも 50 点です.
(6) 試験時間は，9:30〜12:00 です.
(7) 解答用紙は，白紙を含め全て提出して下さい.

専門基礎分野の問題（数学）

次の I-1 ～ I-4 の４題全てに解答せよ．

$\boxed{\text{数学 I-1}}$　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ とし，$\mathbb{R}^4$ 上の１次変換 f を，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と定める．$\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^4$ の零ベクトルを表すとし，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V と W を

$$V = \mathrm{Im}\, f = \{f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^4 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\},\ \ W = \mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}$$

とする．次の各問いに答えよ．

(1) 行列 A の階数を求めよ．

(2) A の第 j 列に対応する $\mathbb{R}^4$ のベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とするとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が V を生成することを示せ．

(3) V の次元と１組の基底を求めよ．

(4) W の次元と１組の基底を求めよ．

(5) $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\text{数学 I-2}}$　a を実数とし，行列 A を以下のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，次の各問いに答えよ．

(1) A は相異なる２つの固有値をもち，固有多項式の重根に対応する固有値の方が単根に対応する固有値より大きいものとする．このとき，a の値を求めよ．

以下，a は (1) で得られた値であるとする．

(2) 大きい方の固有値に対する固有空間の基底，および，小さい方の固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) ${}^t TAT$ が対角行列になるような直交行列 T を求め，対角行列 ${}^t TAT$ を答えよ．

$\boxed{\text{数学 I-3}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{x^2}-\frac{1}{1-\cos x}\right)$ が収束するように実数 a を定め，そのときの極限値を求めよ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}dx$ の値を求めよ．

(3) n を自然数，p を実数とし，

$$a_n=\iint_{D_n}(x^2+y^2)^{-\frac{p}{2}}\,dxdy,\quad D_n=\left\{(x,y)\;\middle|\;\frac{1}{n^2}\leq x^2+y^2\leq 1\right\}$$

とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ の収束・発散を調べ，もし収束するときは，その極限値を求めよ．

$\boxed{\text{数学 I-4}}$ $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする．次の各問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を述べよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n=\int_0^{n\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\quad(n\in\mathbb{N})$$

で定めるとき，$\{b_n\}$ はコーシー列であることを示せ．

(3) 数列 $\{c_n\}$ を

$$c_n=\int_0^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\quad(n\in\mathbb{N})$$

で定めるとき，$\{c_n\}$ はコーシー列でないことを示せ．