幾何構造論特別講義 I・II レポート問題

2009 年 7 月 27 日（月）から 7 月 31 日（金）に行われた小野　薫 教授（北海道大学）による大学院集中講義

「ラグランジュ部分多様体の幾何学」

の単位を取得したい学生は，以下の問題（部分的でもよい）から選択（全部でもよい）・解答して，数学教室事務室（吉村さん）へ 8 月 10 日（月）までに提出してください。以下の問題以外でも小野薫先生が講義の中で出した Exercise や証明を省略された部分を解いてレポート提出してよいです。その他相談など必要な学生は 8 月 10 日（月）までに大仁田 ohnita@sci.osaka-cu.ac.jp まで連絡ください。評価は平常点（出席等）やレポートに基づいて行います。

問題 1. $\mathbf{R}^{2n}$ の標準シンプレクティック形式を

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

とする．

(1) 各 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_{2n}), \mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n}$ に対して，

$$\omega_0(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i b_{n+i} - b_i a_{n+i})$$

によって与えられることを示せ．

(2) $\mathbf{R}^{2n}$ のベクトル部分空間 U に対して，

$$U^{\perp_{\omega_0}} := \{v \in \mathbf{R}^{2n} \mid \omega_0(v, u) = 0 \text{ for each } u \in U\}$$

と定めるとき，$U^{\perp_{\omega_0}}$ もまた $\mathbf{R}^{2n}$ のベクトル部分空間で，

$$\dim(U) + \dim(U^{\perp_{\omega_0}}) = 2n$$

を満たすことを示せ．

問題 2. (M, ω) を連結なシンプレクティック多様体とする．このとき，任意の M の 2 点 p,q に対して，シンプレクティック形式 ω を保つ（i.e. $\varphi^*\omega = \omega$）M の微分同相写像 $\varphi : M \to M$ で $\varphi(p) = q$ なるものがものが存在する。これを証明せよ。

問題 3. 原点 O を中心，半径 1 の 2 次元球面

$$\mathrm{S}^2 := \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

と半径 1 で高さ 2 の 2 次元円柱面

$$\mathrm{C}^2 := \{\mathbf{z} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| < 1\}$$

考える．$D(T^*S^1) \cong C^2$ 　S^2 の北極と南極を，$p_+ = (0,0,1)$,$p_- = (0,0,-1)$ とする．写像

$$\Phi : \mathrm{S}^2 \setminus \{p_+, p_-\} \ni (x, y, z) \longmapsto \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\Big) \in \mathrm{C}^2$$

はシンプレクティック微分同相写像であることを示そう．次の問いに答えよ．

(1)

$$\Phi : \mathrm{S}^2 \setminus \{p_+, p_-\} \longrightarrow \mathrm{C}^2$$

は微分同相写像であることを示せ．

(2) 球面 S^2 の面積要素は，局所座標系

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) \quad (-\pi < u < \pi, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2})$$

において, 2 次微分形式

$$(\cos v) du \wedge dv$$

によって与えられることを示せ．この 2 次微分形式を ω_{S^2} で表す．

(3) 円柱面 C^2 の面積要素は，局所座標系

$$\mathbf{z}(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t) \quad (-\pi < \theta < \pi, -1 < t < 1)$$

において, 2 次微分形式

$$d\theta \wedge dt$$

によって与えられることを示せ．この 2 次微分形式を ω_{C^2} で表す．

(4) このとき，C^∞-写像 Φ による引き戻し

$$\Phi^*(d\theta \wedge dt) = (\cos v) du \wedge dv$$

が成り立つことを示せ．従って，$\Phi^*\omega_{\mathrm{C}^2} = \omega_{\mathrm{S}^2}$，すなわち，$\Phi : \mathrm{S}^2 \setminus \{p_+, p_-\} \longrightarrow \mathrm{C}^2$ はシンプレクティック微分同相写像である．

問題 4. 今，シンプレクティック多様体 M として，$\mathbf{R}$ の余接ベクトル束 $M = T^*\mathbf{R} \cong \mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}$ を $T^*\mathbf{R}$ の零切断として埋め込まれたラグランジュ部分多様体と考えよう．$\mathbf{R}$ 内の近傍で定義された C^∞-関数 $z = f(x)$ に対して，f の微分 $df = \frac{df}{dx}dx$ は，$T^*\mathbf{R}$ の切断として，$T^*\mathbf{R}$ のラグランジュ部分多様体を与える．f の導関数 $\frac{df}{dx}$ のグラフは，この $T^*\mathbf{R} \cong \mathbf{R}$ に埋め込まれたラグランジュ部分多様体に他ならない．さて，f の微分 df が $T^*\mathbf{R}$ の閉ラグランジュ部分多様体，すなわち閉曲線，になるとき，もとの関数 f のグラフを表す曲線についてどのようなことが言えるか？

問題 5. 本集中講義に聴取した感想を述べよ．例えば，特に印象に残った点や興味を刺激された点は、どのようなことか？自分自身の数学の勉強・研究にとって有益な点は？この集中講義で学び得た数学の要約，など．