

令和4年度
大阪公立大学大学院理学研究科
博士前期課程（修士課程）・数学専攻
筆答試験問題（専門分野）

数学専攻受験者に対する注意事項

- (1) 数学専攻の専門分野の問題は1ページ～7ページにあります。
- (2) 数学II-1～数学II-16の問題の中から3題を選択して解答して下さい。
- (3) 解答用紙は、6枚配布します。
- (4) 解答は、問題ごとに2枚の解答用紙を用い、枠内に記入して下さい。解答用紙の全てに、受験番号、氏名および問題番号を記入して下さい。また、問題ごとに何枚中の何枚目かを記入して下さい。
- (5) 配点は、各問題とも50点です。
- (6) 試験時間は、13:00～15:30です。
- (7) 解答用紙は、白紙を含め全て提出して下さい。

専門分野の問題（数学）

次の数学 II-1 ～ 数学 II-16 の問題の中から 3 題を選択して解答せよ（4 題以上解答しないこと）．解答用紙に選択した問題の番号を書き忘れないように注意せよ．

数学 II-1 A を複素正方行列とし， λ, μ を相異なる複素数とする． A の固有多項式（特性多項式） $g_A(t)$ が

$$g_A(t) = (t - \lambda)^5(t - \mu)^2$$

であるとする． A の最小多項式を $p_A(t)$ とする．固有値 λ, μ に対する固有空間の次元をそれぞれ n_λ, n_μ とする．次の各問いに答えよ．

- (1) $p_A(t) = (t - \lambda)^3(t - \mu)^2$ ， $n_\lambda = 2$ のとき， A のジョルダン標準形を求めよ．
- (2) $p_A(t) = (t - \lambda)^4(t - \mu)$ のとき， n_λ, n_μ をそれぞれ求めよ．
- (3) $n_\lambda = 4$ ， $n_\mu = 1$ のとき， $p_A(t)$ を求めよ．
- (4) $\lambda = 0$ ， $n_\lambda = 2$ ， $n_\mu = 1$ のとき， A^4 のジョルダン標準形を求めよ．

数学 II-2 n を 3 以上の整数とし，整数 k に対して 2 次正則行列 $R(k), S(k)$ を

$$R(k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & -\sin \frac{2k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} & \cos \frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}, \quad S(k) = \begin{pmatrix} \cos \frac{2k\pi}{n} & \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} & -\cos \frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}$$

と定める．また， $\mathbb{R}$ の元を成分とする 2 次正則行列の全体がなす群 $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R})$ の部分集合 C, D を

$$C = \{R(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad D = \{R(k), S(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

と定める．次の各問いに答えよ．

- (1) C と D は群 $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R})$ の部分群であることを示せ．
- (2) C は位数 n の巡回群であることを示せ．
- (3) D は $R(1), S(0)$ で生成されることを示せ．
- (4) 正整数 k に対して， $R(k)$ と $S(k)$ の位数を求めよ．
- (5) n を奇数とする．群準同型写像 $f: D \rightarrow C$ は自明なものしか存在しないことを示せ．ただし，群準同型写像 $f: D \rightarrow C$ が自明であるとは， $\mathrm{Im} f = f(D)$ が単位元のみからなることをいう．

数学 II-3 R を単位元 1 を持つ可換環とし、 R において $1 \neq 0$ であるとする。 R に関する条件 $(*)$ を次で定義する。

$(*)$ R の $\{0\}$ でない任意のイデアル I, J に対して、 $I \cap J \neq \{0\}$ が成り立つ。

このとき次の各問いに答えよ。

- (1) R が整域ならば、 R は条件 $(*)$ を満たすことを示せ。
- (2) K を体とすると、 $K[x]/(x^2)$ は条件 $(*)$ を満たすが、整域ではないことを示せ。ただし、 $K[x]$ は K 上の 1 変数多項式環であり、 (x^2) は x^2 が生成する $K[x]$ の単項イデアルを表す。
- (3) R のすべての素イデアルの共通部分を N とおく。 R が条件 $(*)$ を満たし、 $N = \{0\}$ が成り立つとき、 R は整域であることを示せ。
- (4) K を体とすると、 $K[x, y]/(xy)$ は条件 $(*)$ を満たさないことを示せ。ただし、 $K[x, y]$ は K 上の 2 変数多項式環であり、 (xy) は xy が生成する $K[x, y]$ の単項イデアルを表す。

数学 II-4 q 個の元からなる有限体を $\mathbb{F}_q$ と表す。 $\mathbb{F}_2$ 上の多項式 $f(x), g(x)$ をそれぞれ $f(x) = x^4 + x + 1$, $g(x) = x^4 + x^3 + 1$ とし、 $f(x)$ の根の一つを α とする。次の各問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ は $\mathbb{F}_2$ において既約であることを示せ。
- (2) α は 15 乗して初めて 1 になることを示せ。
- (3) $g(x)$ の全ての根を α^i ($1 \leq i \leq 15$) の形で表せ。
- (4) $\mathbb{F}_{16}$ は $\mathbb{F}_4$ を含むか否か、理由を付けて答えよ。
- (5) $\mathbb{F}_{16}$ は $\mathbb{F}_8$ を含むか否か、理由を付けて答えよ。

数学 II-5 実数 a に対して $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ とおくとき、次の各問いに答えよ。

- (1) $\mathcal{O} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ とおけば $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ の位相であることを示せ。
- (2) 次の命題が成り立つならば証明を与え、成り立たなければ反例を挙げよ。「 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 X は位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ の部分空間として連結である」
- (3) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 X が位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ の部分空間としてコンパクトであるためには、 X の最大値が存在することが必要十分であることを示せ。

数学 II-6 Gauss 曲率が -1 である双曲平面上の測地正六角形について、一つの内角を θ , 面積を S とするとき、次の各問いに答えよ.

- (1) S を θ を用いて表せ.
- (2) $S = \pi$ となる時の θ を求めよ.
- (3) θ が取り得る値の範囲を、理由を付けて答えよ.

数学 II-7 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の標準座標系を $\{x, y\}$ とする. $\mathbb{R}^2$ 上の2つのベクトル場 X, Y を,

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$
$$Y = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

と定める. このとき、次の各問いに答えよ.

- (1) ベクトル場 X のフロー $\{\varphi_t\}$ を求めよ.
- (2) ベクトル場 Y のフロー $\{\psi_s\}$ を求めよ.
- (3) ベクトル場 X と Y のブラケット積 $[X, Y]$ を計算せよ.
- (4) ベクトル場 X とベクトル場 Y の和のベクトル場 $X + Y$ のフローを求めよ.

数学 II-8 3次元単体 σ に対し、その2次元辺単体 τ を任意に固定する. K を σ の辺単体で次元が1以下のもの全てと τ からなる集合とする. このとき次の各問いに答えよ.

- (1) K が単体的複体であることを示せ.
- (2) K の整係数ホモロジー群 $H_i(K)$ ($i \in \mathbb{Z}$) を求めよ.
- (3) 自然数 n に対し、 X_n を平面 $\mathbb{R}^2$ から n 点を取り除いて得られる空間とする. X_n と K の多面体 $|K|$ がホモトピー同値であるような自然数 n が一意的に存在することを示せ.

数学 II-9 ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 内の閉円板 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ と円周 $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ に対し, 包含写像を $i: S \rightarrow D$ とする. 次の各問いに答えよ. 必要ならば S の基本群は既知のものとして用いて構わない.

- (1) 任意の $a \in S$ に対し, $D - \{a\}$ は可縮であることを示せ.
- (2) 任意に $a \in D - S$ および $b \in S$ をとるとき, 基本群 $\pi_1(D - \{a\}, b)$ を求めよ.
- (3) S は D のレトラクトでないことを示せ. すなわち, 連続写像 $r: D \rightarrow S$ で, 合成写像 $r \circ i$ が S 上の恒等写像であるようなものは存在しないことを示せ.
- (4) 任意の同相写像 $f: D \rightarrow D$ に対し, $f(S) = S$ であることを示せ.

数学 II-10 次の各問いに答えよ.

- (1) $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/a_n)}{\log n} = s$ を満たす級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は, $s > 1$ ならば収束し, $s < 1$ ならば発散することを示せ.
- (2) $b_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/b_n)}{\log n} = 1$ を満たす級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ で, 収束するものと発散するものの例をそれぞれ挙げよ.

数学 II-11 複素関数について, 次の各問いに答えよ. ただし, i は虚数単位とする. また, 各単純閉曲線は正の方向に向きづけられているとする.

- (1) $f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{z^4 + 4}$ とする.
 - (i) 上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ における各孤立特異点での f の留数の値を求めよ. ただし, 指数関数および三角関数は, できるだけ値を求めること.
 - (ii) $R > 2$ とし, C_R を領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ の境界とする. f を C_R に沿って積分することにより, $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi x}{x^4 + 4} dx$ の値を求めよ.
- (2) $g(z) = \frac{1}{z^2 + 2}$ とし, $C: |z| = 1$ とする. 整数 n に対して, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz$ の値を求めよ.
- (3) 方程式 $\cos z = z^2$ の $|z| < 1$ における相異なる解の個数を求めよ.

数学 II-12 複素数を成分とする数列空間 l^p ($1 \leq p \leq \infty$) を

$$l^p = \left\{ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mid \|x\|_{l^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, (1 \leq p < \infty),$$
$$l^{\infty} = \left\{ x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mid \|x\|_{l^{\infty}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\},$$

により定める. このとき次の各問いに答えよ.

(1) $1 \leq p < \infty$ に対して $l^p \subset l^{\infty}$ となることを示せ.

(2) $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$, $y_k = (-1)^k$ により写像

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in l^1$$

を定める. このとき f が l^1 の共役空間の元であることを示し, 共役空間上のノルムを求めよ.

(3) l^1 上の有界な点列で弱収束しないものを構成せよ.

数学 II-13 次の各問いに答えよ. ただし, 関数 $x(t)$ に対して $x' = \frac{dx}{dt}$, $x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$ とする.

(1) 微分方程式 $x'' + (2-a)x' - 2ax = e^{-t}$ を考える. ただし a は実数の定数とする.

(i) 一般解を求めよ.

(ii) $a = 1$ のとき, $x(0) = p$, $x'(0) = q$ を満たす解 $x(t)$ が $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ となるための実数 p, q の条件を求めよ.

(2) 連立微分方程式 $x' = -y$, $y' = 5x + 2y$ の一般解を求めよ.

(3) 関数 $x(t)$ が微分方程式 $x' + x^2 + m(t)x + n(t) = 0$ を満たすとする. ただし $m(t)$, $n(t)$ は連続関数とする.

(i) $x(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$ のとき, 関数 $y(t)$ の満たす微分方程式を求めよ.

(ii) 微分方程式 $x' = (x - \alpha)(\beta - x)$ の一般解を求めよ. ただし α, β は実数の定数で $\alpha \neq \beta$ とする.

数学 II-14 f は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測関数で $0 \leq f(x) < \infty$ ($x \in \mathbb{R}$) を満たすものとする. 整数 k に対して $E_k = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^k \leq f(x) < 2^{k+1}\}$ とおく. μ は 1 次元ルベーグ測度を表すものとし, μ に関する積分は $\int \cdots dx$ で表す. 次の各問いに答えよ.

(1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ とおくと, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n 1_{E_k}(x) = 1_A(x)$$

が成り立つことを示せ. 但し, 集合 S に対して $1_S(x)$ は, $x \in S$ のとき 1, $x \notin S$ のとき 0 なる関数を表す.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \int_{E_k} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ が成り立つことを示せ.

(3) $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n 2^k \mu(E_k)$ はともに収束するかともに発散するかのいずれかである. これを示せ.

数学 II-15 N 個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_N$ と $n = 1, 2, \dots, N$ に対し

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad M_n = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$$

とおく. また $M_0 = 0$ とする. 次の各問いに答えよ.

(1) 正の数 c に対し, 等式

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(M_{n-1} \leq c < |S_n|) = \mathbb{P}(M_N > c)$$

を示せ.

(2) 正の数 a と $n = 1, 2, \dots, N$ に対し, 不等式

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(M_{n-1} \leq 2a < |S_n|, |S_N - S_n| \leq a) \leq \mathbb{P}(|S_N| > a)$$

を示せ.

(3) $X_1, X_2, \dots, X_N$ は独立で, ある正の数 a, b に対し

$$\mathbb{P}(|S_N - S_n| \leq a) \geq b, \quad 1 \leq n \leq N$$

をみたすとき

$$\mathbb{P}(M_N > 2a) \leq \frac{1}{b} \mathbb{P}(|S_N| > a)$$

が成り立つことを示せ.

数学 II-16 U_1, U_2, U_3 は互いに独立に $[0, 1]$ 上の一様分布に従う. 次の各問いに答えよ.

(1) 確率変数 X_1, X_2, X_3 を次のように定める.

$$X_1 = \begin{cases} 1, & U_1 \geq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} 1, & U_2 \geq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad X_3 = \begin{cases} 1, & U_3 \geq \frac{1}{4} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

このとき, $X = X_1 + X_2 + X_3$ の確率分布を求めよ.

(2) $Y = U_1 - 2U_2 + U_3$ とする. $0 < a < 4$ を満たす正数 a について, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{1}{2a^2}$$