平成１５年度　修士論文

コイン・トスにおけるランダムネス

大阪府立大学大学院工学研究科

電気・情報系専攻 数理工学分野

数理物理講座 非線形力学研究グループ

学籍番号 ２０２１２１００４８

諏訪下 誠

２００４年2月

目 次

第1章　イントロダクション

われわれは、日常生活を営む中で平等に物事を決しなければならない場面に時々遭遇する。そういった場面で、コイン・トスやさいころ、またルーレットなどは、よく登場の機会を得る。それは、コイン・トス、さいころ、ルーレットなどが偏ることなく平等にそれぞれの結果である、表裏、さいころの目、ルーレットの値を出すことを前提として行っている。しかし、それらの生み出される結果は真に平等であるのだろうか。また、ランダムであるのだろうか。ここで、（偏らずに平等な結果）＝（ランダムな結果）ということができるだろう。こういった疑問は、誰しもが必ず抱くはずである。しかし、こういった身近な課題であるのにもかかわらず、それら「ランダム」な結果を生み出すものに対する「ランダムネス」の性質およびその平等な結果を生み出すメカニズムに関して行われた研究は多くない [1]〜[7]。

ここで、「ランダム」という言葉はいくらかあいまいな部分を含んでいるので、もう少し「ランダム」について考えてみよう。なぜなら、「ランダム」という言葉の意味を決めることなしに「ランダム」と思われる結果を生み出すものの「ランダムネス」について議論するのは不可能だからである。「ランダム」は不規則、無作為、予測不可能などといった言葉と結びつく。我々は、コインやさいころやルーレットの生み出すランダムネスについて議論する上では、予測不可能性という性質が適当であると考える。すなわち、コイン等の結果が「予測可能」であれば、それらはランダムでなく、「予測不可能」であれば、ランダムであるといえるだろう。以後、本論文では「予測可能性」を「ランダム」と結びつけて考え、結果が「予測可能」であれば、それらはランダムでなく、「予測不可能」であれば、「ランダム」であるとする。

「ランダム」な結果を生み出す力学的なものの中にはコイン・トス

やサイコロなどがあるが、「ランダム」な結果を生み出すものの性質や「ランダム」な結果を生み出すメカニズムについて議論するために、比較的単純な対象としてコイン・トスに着目しよう。コイン・トスはいつでも「予測不可能」な結果を生み出すのだろうか。例えば、コインを十分に低い位置から弱くトスすれば、その結果は「予測可能」であり、コイン・トスがいつでも「予測不可能」な結果を生み出すとは言い切れないと考えられる。したがって、単純にいつでもどんなときでもコイン・トスが「ランダムネス」を有することはないことを示している。なぜいつでも「ランダム」であるといえないのだろうか。これは、表裏の結果を「予測」をする上で、コイン・トスが行われる条件（状態）が大きくかかわっていることを示していると思われる。ここでは、その条件を次のように分類してみる。すなわち、コインの周囲の流体の効果、熱的なノイズ、コインが衝突する床の凹凸などの外的な要因と、初期値（高さ、速さ、角度、はじく強さ）、コインの形状などの内的な要因である。

本論文では、ランダムネスの外的要因を排除することにより、コイン・トスが内的にもつ「ランダムネス」について議論する。すなわち、流体の効果や熱的なノイズなどの外的要因を無視し、決定論的なモデルをたて、数値計算および、解析を通して「予測不可能性」と内的要因である初期値との関係、結果の初期値依存性という観点からランダムネスを定量的に論じることを目的とする。このとき、予測不可能性は、初期条件依存性で表されると考える。

同様の動機に基づき、決定論的なモデルを立てて行われた過去の研究について紹介しよう。Vulovic らはコイン・トスの二次元的なモデルを立て、初期の高さと角速度を変化させ、ベイシン（同じアトラクターに引き込まれる初期点の集合）の構造を調べ、ベイシン・バウンダリー（ベイシンの境界）の数がエネルギーとともに増加していくことを報告している [3]。また、Ferdberg らは、二次元サイコロについての研究を行っている [4]。その中で、様々な量を定義することでランダムネスの強さを定量的に調べている。また、Murray らは、六角形のナットを多数投げるという実験を行い、へりで立つ確率を数値シミュ

レーションの結果と比較した。その結果、単純化したモデルが十分にコイン・トスを再現していることを示した [5]。しかし、今までの研究で、コイントスにおけるランダムネスの性質やメカニズムを明確に理解できたとは言いがたく、理解するうえでの試行錯誤の段階と言っていいだろう。

本論文では、比較的単純な決定論的モデルを用い、初期条件空間の様々な断面の観察やランダムネスの強さの目安となる新しい量の導入によって、ベイシン構造の特徴の定量化を試みる。いずれも、これまでの研究になかったものであり、ランダムネスの理解に対して一石を投じるものと思われる。

本論文の構成は以下のようになっている。第二章では、コイン・トスの最も簡単な決定論的モデルとして、二次元空間中で、床と非弾性衝突を繰り返す棒を考えた。そのとき、真空中で熱的な揺らぎ等を無視し、かつ床が水平で滑らかであるという仮定をおいた。予測不可能性は初期値依存性で表されると考え、このモデルを用い、コイン・トスにおけるランダムネスに対して初期値依存性という観点から迫った。具体的には、初期値空間内での断面における、ベイシンの構造を見ることにより、結果の初期値依存性を概観した。また、結果の初期値依存性を定量的に示すために、ベイシン・バウンダリーに着目し、ベイシン・バウンダリーのフラクタル次元を測定した [8]〜[13]。この結果として、ベイシンの構造を特徴づけるスケールを導入した。

第三章では、第二章において滑らかであると仮定した床をラフなものとして、Vulovic らのモデルを採用し、モデルをより現実的なものとするための拡張をおこなった。そのモデルを用い、初期値空間内での断面のベイシンの構造を見ることにより、結果の初期値依存性の概観した。また、摩擦の効果なども調べた。

第四章では、三次元でのさいころの挙動に関するモデルの構築を試みた。

第五章では、本論文のまとめと今後の課題について述べる。

付録では、無次元化の計算をまとめる。

第2章　二次元、スムーズな床

2.1　モデル

この章では、簡単のために二次元空間で考え、コインとしては厚さを無視した一次元の線分（以下、「棒」とする）を用いる。この場合、コイン・トスの表裏は棒の向きに対応する。

決定論的なモデルを立てるために以下のような仮定をおく。

1. 古典力学に従う。
2. コイン（棒）は剛体とする。
3. トスは真空中で行われるとする。

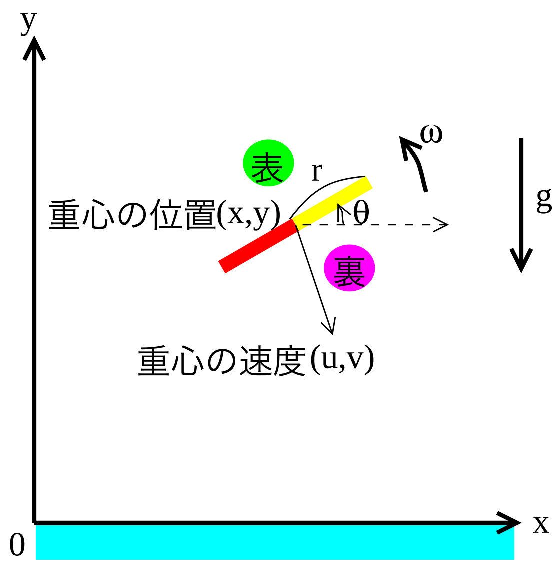

図 2.1: 座標系

4. 熱的なノイズを無視する。

第２章〜第４章では、コインやサイコロなどの物体は剛体とする。また、物体は真空中の古典力学に支配され、熱的なノイズは無視する。剛体とおいたのは、物体の内部自由度を無視することであり、これを拡張するには、弾性体とみなすことなどが考えられる。真空中というのは棒のまわりの流体の効果を無視するためにおいた仮定である。以上、われわれのモデルでは、コインやさいころの結果を決める過程というのは、物体が、一様重力場において、水平で滑らかな床との衝突を繰り返し、衝突ごとに何らかの力学的エネルギーを失い、棒の向きが決まる過程と考えられる。以下、その過程に対するモデルを具体的に述べる。

2.1.1 モデル

運動は、床に接触するまでの自由落下過程と無限小時間のうちに起きる衝突過程とに分けて考える。鉛直上向きに y 軸（床の位置を $y = 0$ とする）、水平右向きに x 軸をとる。必要な変数は棒の質量 m、長さ $2r$、重力加速度 g の三つのパラメータと重心の位置 (x, y)、重心の速度 (u, v)、棒の両端を L(Left)、R(Right) としたときに、x 軸の正の方向とベクトル $\overrightarrow{LR}$ 方向のなす角度 θ、またその角速度 ω の六つの変数である。角度 θ および角速度 ω は反時計回りを正とする。（図 2.1）また、衝突する床として滑らかで摩擦のない水平な床を考える。初期条件は重心の位置 (x_0, y_0)、角度 θ_0、重心の速度 (u_0, v_0)、角速度 ω_0 で与えられる。

◆自由落下過程

自由落下過程での運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \tag{2.1}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad , \tag{2.2}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \tag{2.3}$$

である。ここで、I は棒の重心周りの慣性モーメントであり、一様な棒の場合は $I = mr^2/3$ となる。もし、棒が一様でなく両端の方の比重が大きい場合は I は大きくなるので、外力に対して回りにくくなり、逆に重心のほうに比重が大きくなった場合は、I は小さくなり回りやすくなる。後に述べるように床との衝突にかかる時間は無限小のであると仮定するが、n 回目の衝突時の時刻を t_n、t_n における衝突後の重心の位置、重心の速度、角度、角速度をそれぞれ (x_n, y_n)、(u_n, v_n)、θ_n、ω_n とし、(2.1)、(2.2)、(2.3) を解くと時刻 $t(> t_n)$ での各変数は、

$$x = u_n(t - t_n) + x_n \quad , \tag{2.4}$$

$$y = y_n + v_n(t - t_n) - \frac{1}{2}g(t - t_n)^2 \quad , \tag{2.5}$$

$$\theta = \theta_n + \omega_n(t - t_n) \quad , \tag{2.6}$$

$$u = u_n \quad , \tag{2.7}$$

$$v = v_n - g(t - t_n) \quad , \tag{2.8}$$

$$\omega = \omega_n \tag{2.9}$$

となる。この状態は次に述べる接触条件が満たされるまで続く。

◆接触条件

接触は

$$y - Ar\sin\theta = 0 \tag{2.10}$$

を満たす t_n より大きい最小の t に起きるとする。ここで A は、

$$A = sgn(\sin\theta) \tag{2.11}$$

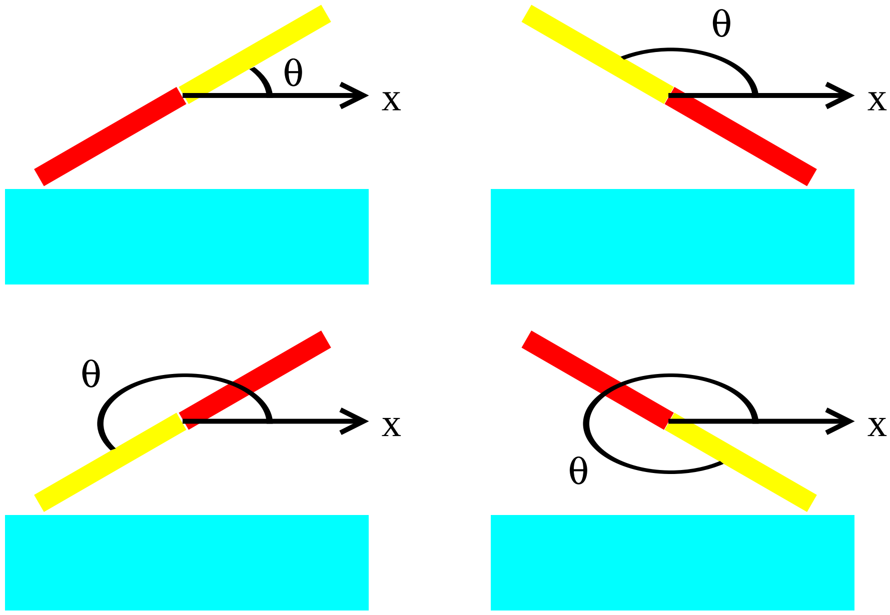

図 2.2: 接触条件

で、物理的にはどちらの端が接触するかをあらわしている。すなわち、$A=1$ ならば L（赤）が接触し、$A=-1$ ならば R（黄色）が接触する (図 2.2)。棒の接触点の速度 y 成分は、

$$v - Ar\omega\cos\theta \tag{2.12}$$

であるが、これは負であることに注意しなければならない。接触条件が満たされると、棒の運動は、次に述べる衝突過程に移る。

◆衝突過程

衝突過程は無限小時間のうちに起きるものと仮定する。すなわち、重心の位置 (x, y) や、棒と x 軸となす角度 θ は衝突前後で変化しないとする。衝突前後における、その他の物理量の変化は、運動量の変化、角運動量の変化、跳ね返りの式によって決定されるとする。本章では、簡単のため床はなめらかとする。この仮定はいささか単純すぎるかもしれないが、以下見るようにコイン・トスのランダムネスの本質の一部と見るためには十分であろう[1]。衝突前後での x、y 方向の運動量の

[1] 次章において、もう少し現実的なモデルへの拡張を行う。

変化をそれぞれT_x、T_yとする。また、跳ね返り係数をeとし、衝突前の重心の位置、重心の速度、角速度、角度をそれぞれ(x_b, y_b)、(u_b, v_b)、θ_b、ω_bとする。衝突後の物理量をそれぞれ(x_a, y_a)、(u_a, v_a)、ω_a、θ_aとすると

運動量の変化：

$$mu_a - mu_b = T_x = 0 \quad , \tag{2.13}$$

$$mv_a - mv_b = T_y \quad . \tag{2.14}$$

角運動量の変化：

$$I(\omega_a - \omega_b) = AT_x r \sin\theta_b - AT_y r \cos\theta_b \quad . \tag{2.15}$$

跳ね返りの式：

$$-\frac{v_a - Ar\omega_a \cos\theta_a}{v_b - Ar\omega_b \cos\theta_b} = e \quad . \tag{2.16}$$

である。

(2.13)、(2.14)、(2.15)、(2.16) を解くと、T_x、T_yおよび衝突後の物理量は衝突前の物理量を用いて以下のようにあらわされる。

$$u_a = u_b \quad , \tag{2.17}$$

$$v_a = \frac{(Ie - mr^2\cos^2\theta_b)v_b - AIr\omega_b(1+e)\cos\theta_b}{-I - mr^2\cos^2\theta_b} \quad , \tag{2.18}$$

$$T_x = 0 \quad , \tag{2.19}$$

$$T_y = (1+e)\frac{Imv_b - AImr\omega_b\cos\theta_b}{-I - mr^2\cos^2\theta_b} \quad , \tag{2.20}$$

$$\omega_a = \frac{Arm(1+e)v_b\cos\theta_b - (emr^2\cos^2\theta_b - I)\omega_b}{I + mr^2\cos^2\theta_b} \quad . \tag{2.21}$$

床が滑らかと仮定したので、棒は床から水平方向の力を受けない。また、自由落下過程においても、棒はx方向には力を受けないので、x方向の運動は分離し、全過程を通して等速運動を行うことがわかる。

また、力学的エネルギーは以下のように表される。

$$E = mgy + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad . \tag{2.22}$$

衝突前の力学的エネルギーを E_b、衝突後を E_a とすると、衝突が起きるたびに棒の失うエネルギー ΔE は

$$E_b - E_a \equiv \Delta E = (1-e^2)\frac{m(v_b - Ar\omega_b \cos\theta_b)^2}{2(1+\frac{mr^2}{I}\cos^2\theta_b)} \tag{2.23}$$

となり、衝突ごとにエネルギーを失う（$\Delta E > 0$）ことが分かる。また、(2.23) 式は跳ね返り係数が e である質点と壁との跳ね返りにより質点が失うエネルギーの式と似た形をしている。質点の失うエネルギーは、質点の質量を m、衝突前の速度を v_b とした場合、$\Delta E = (1-e^2)\frac{mv_b^2}{2}$ である。しかし、棒の場合、v_b の部分に床と接触する際の棒の接触点の速度が入る。よって、接触点の速度が大きければ大きいほど失うエネルギーは大きくなる。また、分母には $\frac{2mr^2}{I}\cos^2\theta_b$ という棒の接触する際の角度で決まる項が加わっており、角度に関しては、棒が垂直に近ければ失うエネルギーは大きい。逆に棒が水平に近ければ近いほど小さなエネルギーを失う。図 2.1.1 は、ΔE を θ の関数としたもので、一度の衝突では棒が垂直に立っている状況に近ければ近いほど失うエネルギーが大きいことを表している。しかし、棒が水平方向に近い場合でも、エネルギーが回転エネルギーにより多く分配され、重心の位置が半径を越えずに多数回の衝突を繰り返しやすくなる。これは、後に述べる一回の試行の典型例においても確認できる。

2.1.2 無次元化

パラメータのいくつかは無次元化することによってスケールされてしまう。ここでは、以下のように全ての物理量を無次元化する。無次元量として $'$ のついたものを以下のように定義する。詳細は付録 A 参照のこと。

$$x' = \frac{x}{r} \quad , \tag{2.24}$$

$$y' = \frac{y}{r} \quad , \tag{2.25}$$

$$t' = t\sqrt{\frac{g}{r}} \quad , \tag{2.26}$$

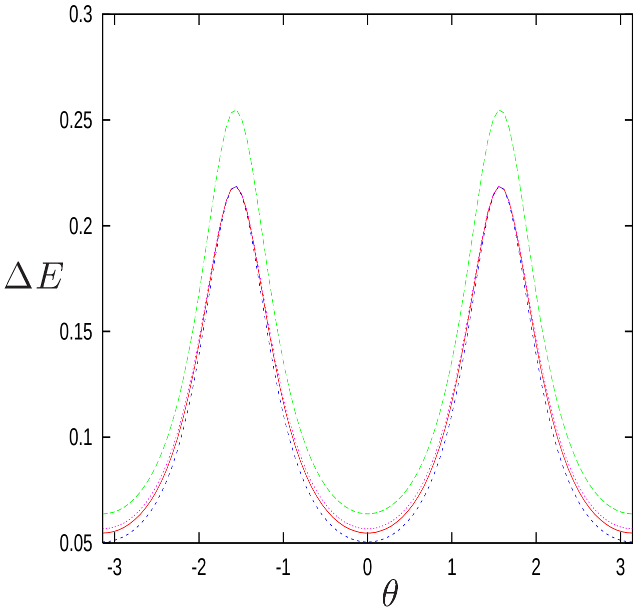

図 2.3: 接触時に失うエネルギー ΔE の θ 依存性。式 (2.23) で、分子つまり接触点の y 方向の速度を 1 に固定し、跳ね返り係数を $e = 0.7$ として黄緑の線を、$e = 0.75$ として、赤い線をプロットした。また、慣性モーメントについても $I = 0.3$ として紫の線を、$I = 0.35$ として青い線をプロットした。

$$v' = \frac{v}{\sqrt{rg}} \quad , \tag{2.27}$$

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{r}{g}} \quad , \tag{2.28}$$

$$T'_y = \frac{T_y}{m\sqrt{rg}} \quad , \tag{2.29}$$

$$I' = \frac{I}{mr^2} \quad , \tag{2.30}$$

$$E' = \frac{E}{mrg} \quad . \tag{2.31}$$

これらの無次元量を用いて、自由落下過程、接触条件、衝突過程はそれぞれ以下のように無次元化される。ここで、$'$ は省略した。

◆自由落下過程

自由落下過程での運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad , \tag{2.32}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -1 \quad , \tag{2.33}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \tag{2.34}$$

となる。

◆接触条件

接触は

$$y - A\sin\theta = 0 \tag{2.35}$$

を満たす t_n より大きい最小の正の t に起きる。ここで A は、

$$A = sgn(\sin\theta) \tag{2.36}$$

で物理的にはどちらの端が接触するかをあらわしており、$A = 1$ ならばL（赤）が接触し、$A = -1$ ならばR（黄色）が接触する (図 2.2)。棒の接触点の速度 y 成分は

$$v_b - A\omega_b\cos\theta_b < 0 \tag{2.37}$$

となる。

◆衝突過程

衝突の前後における物理量の変化についても、

$$v_a = \frac{(Ie - \cos^2\theta_b)v_b - AI\omega_b(1+e)\cos\theta_b}{-I - \cos^2\theta_b} \quad , \tag{2.38}$$

$$T_y = (1+e)\frac{Iv_b - AI\omega_b\cos\theta_b}{-I - \cos^2\theta_b} \quad , \tag{2.39}$$

$$\omega_a = \frac{A(1+e)v_b\cos\theta_b - (e\cos^2\theta_b - I)\omega_b}{I+\cos^2\theta_b} \tag{2.40}$$

となる。また、衝突時に失われるエネルギーΔEは

$$\Delta E = (1-e^2)\frac{(v_b - A\omega_b\cos\theta_b)^2}{2(1+\frac{1}{I}\cos^2\theta_b)} > 0 \tag{2.41}$$

となる。

（2.32）〜（2.40）が、本章で扱うモデルであり、これを用いて、棒の自由落下および床との衝突を繰り返す運動をあらわす。最後に終了条件について述べよう。

◆終了条件

自由落下過程ではエネルギーが保存し、衝突過程ではエネルギーの一部が必ず失われることを考慮すれば、棒が静止し、向きがきまるまでには、無限回の衝突が必要になることが予想される。これは、シミュレーションを行ううえで、衝突回数の発散という困難を予想させる。しかし、表裏の結果にのみ着目する場合、垂直に立った静止状態の全エネルギー$E_c = 1$を考えると、E_c以下のエネルギーの棒はその表裏の結果を変えられないことがわかる。したがって、表裏の結果のみに着目するのであれば、$E < E_c$になった時点で結果は確定するので、それ以上の計算は不要になる。数値計算上の困難の大部分はこれで回避できる。実際、シミュレーションにおいて、多くの場合、有限回の衝突の後に$E < E_c$となる。以下、特に断らない限り$E < E_c$を終了条件とした。以上をまとめると次のようになる。

- 独立な物質パラメータは慣性モーメント$I(0 \leq I \leq 1)$、床との反発係数$e(0 \leq e < 1)$
- 初期条件　$(y_0, v_0, \theta_0, \omega_0)$
- 接触条件　$y - A\sin\theta = 0$
- 終了条件

1. $E < E_c (= 1)$

2. その他

- 自由落下過程 (2.32〜2.34)、衝突過程 (2.38〜2.40) を繰り返して、コイン・トス一回の試行が決定論的に決まる (図 2.5 参照)

なお、終了条件の２．その他とは、シミュレーションに特有の問題で $T_y < 0$ となる場合である。これは棒が床から床に向かって力を受けていることになるので物理的におかしい。シミュレーションを行う上で、こういう場合は０．数％の割合で起こる。詳細は §2.5 で述べる。

2.2　シミュレーション

上のモデルは、自由落下過程および衝突の前後の過程の物理量の発展は解析的に解けるが、接触条件は解析的に解くことはできない。そのため、シミュレーションを行う際には、接触条件を精度よく決める必要があり、そのためには何らかの工夫が必要である。本論文では、精度よく接触条件を求めるために二分法を用いて数値計算を行った。すなわち、接触前の時刻 t_1 と接触後の時刻 $t_1 + \Delta t$ が与えられたとき、$t_1 + \frac{\Delta t}{2}$ の状態を計算することによって、接触時刻の範囲を $\frac{\Delta t}{2}$ に狭める。このプロセスを繰り返し行うことで、より精度の高い接触条件を探す（図 2.4 参照)。

１回のコイン・トスに対するシミュレーションの流れは次のようなものになる：
パラメータである跳ね返り係数 e と慣性モーメント I を決め、初期値を与えると、自由落下過程と衝突過程を繰り返し、終了条件を満たしたときに計算を終了させる。その時の θ を見て、結果を $\cos\theta > 0$ で表、$\cos\theta < 0$ で裏とした（図 2.5 参照)。

図 2.6 は、ある適当な初期値を決め、計算を終了するまでの時系列の典型的な例を示したものである。八回の衝突を経て、衝突ごとにエネルギーを失い、$E < E_c$ となったときに計算を終了させている。そのときの θ より、結果は裏となっている。また、$t = 8$ あたりを見ると、

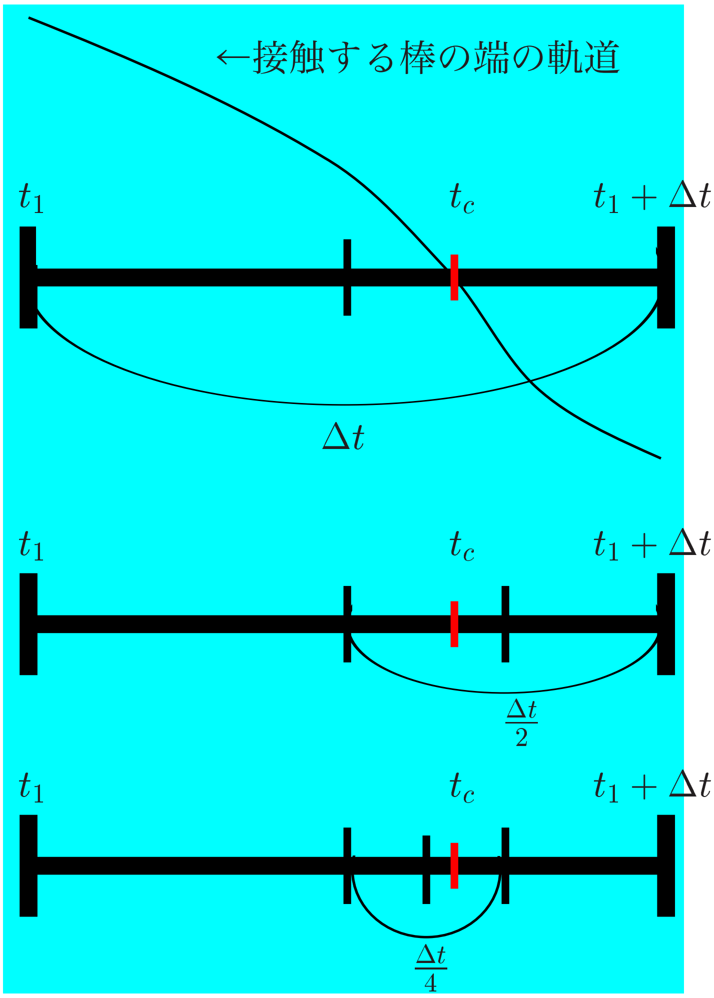

図 2.4: 二分法

θ は $-\pi$ の近くにで棒は水平方向に近くなっており、そのときには重心が半径を越えることなく再び床とぶつかっていることがわかる。このことから、§2.1.2 の直前で述べたように、棒が水平方向に近い場合には、エネルギーが回転エネルギーにより多く分配され、重心の位置が半径を越えずに多数回の衝突を繰り返しやすくなっていることを確認した。

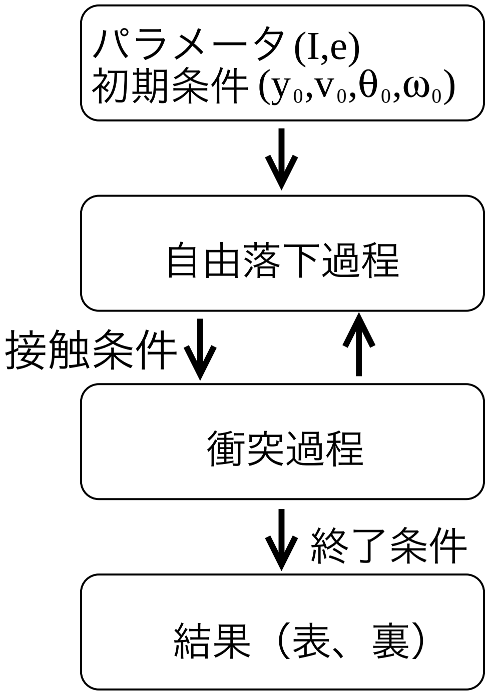

図 2.5: シミュレーションの流れ

2.2.1 初期条件空間の典型的な断面

以下、様々な初期条件に対する表裏の結果を系統的に概観していこう。初期条件空間は４次元 $(y_0, v_0, \theta_0, \omega_0)$ であり、そのうち２つの初期値を固定し、２つの値を変化させることにより断面をとる。各方向の断面を見るためには最低６ $(={}_4C_2)$ 枚が必要である。２つの初期値を固定することで張られる２次元断面上を適当な範囲で５１２等分した各点を初期条件とし、その結果によって初期条件を色分けして見ていく。同じ色が同じ表裏の結果に対応するベイシンを表し、異なる色の接する部分が、ベイシン・バウンダリーとなっている。図とパラメータの関係を表 2.1 にまとめた。ここで、棒の半径が 1 なので初期の角度 θ_0 によっては初期の重心の位置 y_0 が $y_0 < 1$ となったとき床にめり込んでいる状況がありえる。これは非物理的なので、以下、$y_0 \geq 1$ とする。この条件によって、初期条件空間中の $y_0 < 1$ で、床にめり込んでいない部分を除いていることになる。しかし、その部分では、v_0、ω_0

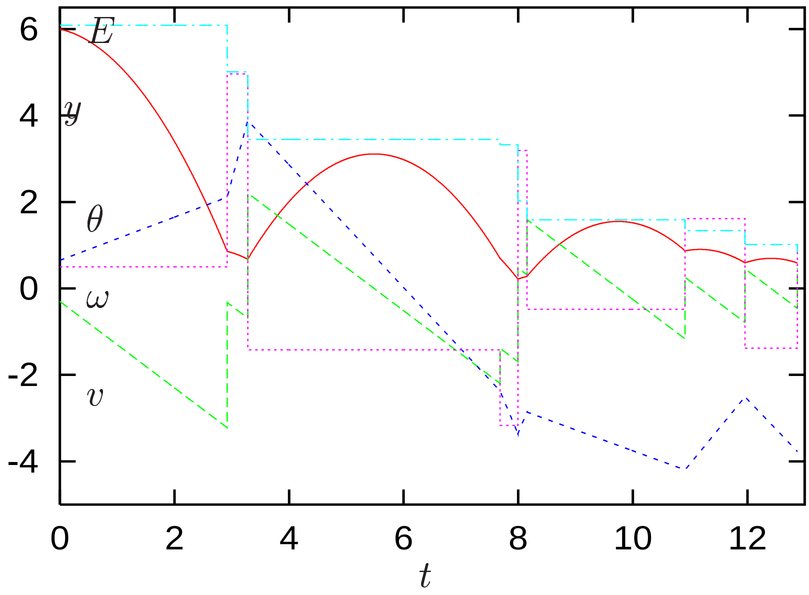

図 2.6: 初期値 $y_0 = 6.0$、$v_0 = -0.3$、$\theta_0 = 0.65$、$\omega_0 = 0.5$、パラメータ $I = 0.33333$、$e = 0.75$ での典型的な一回の試行。それぞれ、赤い線は重心の位置 y、黄緑の線は重心の速度 v、青い線は角度 θ、紫の線 ω、水色の線はエネルギー E をあらわしている。八回の床との衝突後、$E < E_c$ となりシミュレーションを終了させた。そのときの θ より、結果は裏となっている。

表 2.1: パラメータ $I = \frac{1}{3}$、$e = 0.75$ での初期条件空間の断面分類

図 No.	y_0	v_0	θ_0	ω_0
図 2.7	$1 < y_0 < 7$	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 2.8	1	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	$-6 < \omega_0 < 6$
図 2.9	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 2.10	$1 < y_0 < 7$	$-3.464 < v_0 < 3.464$	$\frac{\pi}{4}$	0
図 2.11	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	0	$-6 < \omega_0 < 6$
図 2.12	$1 < y_0 < 7$	0	0	$-6 < \omega_0 < 6$

が大きくならなければ、結果として出る棒の向きと初期の棒の向きとは同じである。また、本節の終わりに、物質パラメータ e 及び I の変化に対する影響も見る。

$y_0 - \theta_0$ 断面

図 2.7 はパラメータ $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、初期値 v_0、ω_0 を $v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$ と固定して、y_0 を $1 \leq y_0 \leq 7$、θ_0 を $-\pi \leq \theta_0 \leq \pi$ の範囲で変化させ、縦軸を θ_0、横軸を y_0 として、二次元棒のモデルで計算させた結果が表となる初期値のところを青、裏となるところを白とした。このモデルは $(\theta_0, \text{表}) \rightarrow (\theta_0 + \pi, \text{裏})$ という θ_0 方向に対する対称性を持っており、図 2.7 を見ると、$-\pi < \theta_0 < 0$ の部分のベイシンの構造を青白反転させると $0 < \theta_0 < \pi$ の部分のベイシンの構造と同じになり、θ_0 方向の対称性が確認できる。図 2.7 から、y_0 を大きくすればするほど、つまり、E_0 を大きくすればするほどベイシンの構造が複雑になっていくことが見て取れる。しかし、$\theta_0 = 0, \pm\pi$ の近くには、$y_0 = 7$ においても結果を同じくする広い領域が存在している。これは $\omega_0 = 0$ という条件が効いているためである。詳しくは、後の §2.2.2 で述べる。

$\omega_0 - \theta_0$ 断面

図 2.8 はパラメータ $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、初期値 y_0、v_0 を $y_0 = 1$、$v_0 = 0$ と固定し、縦軸を θ_0、横軸を ω_0 として、ω_0 を $-6 \leq \omega_0 \leq 6$、θ_0 を $-\pi \leq \theta_0 \leq \pi$ の範囲内を等分した初期値の点で、結果が表となる初期値のところを白、裏となるところを黒とした。以下、特別に断らない限り、同様にして結果が表となる初期値のところを白、裏となるところを黒とした。このモデルは、$(\theta_0, \omega_0) \rightarrow (-\theta_0, -\omega_0)$ の対称性を持っているが、図 2.8 からも、確認できる。また、図 2.8 で ω_0 を大きくすればするほどベイシンの構造は細かくなっている。ω_0 を大きくすることは y_0、v_0 を固定しているため E_0 を大きくすることに対応しており、そのことから E_0 が大きくなればベイシンの構造が細かくなっていることが図 2.8 からわかる。図 2.8 での $\omega_0 = 6$ は、図 2.7 での $y_0 = 7$ と $E_0 = 7$ というエネルギーの面で一致している。しかし、等しいエネルギーの元で比較を行うと、図 2.8 では、図 2.7 の $y_0 = 7$ の部分で確認できた結果を同じくする広い領域は存在しない。逆にエネルギーの小さいと

ころでの比較では、図 2.8 においてはおよそ $\omega_0 = 2.4(E_0 = 1.96)$ で最初の構造が出始めているが、図 2.7 で最初の構造が出始めるはおよそ $E_0 = 2.2$ であった。よって、ベイシンの構造の細かさが単純に E_0 によって決まるわけではないこともわかる。

$v_0 - \theta_0$ 断面

図2.9 はパラメータ $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、初期値 y_0、ω_0 を $y_0 = 1$、$\omega_0 = 0$ と固定し、v_0、θ_0 を変化させ、縦軸を θ_0、横軸を v_0 として、結果により初期値を色分けした。また、$-3.464 < v_0 < 3.464$ の幅は初期エネルギー $1 < E_0 < 7$ で図2.7 と同じ幅になっている。$\omega_0 = 0$ における対称性については、このモデルから自明で、図 2.9 を見ると、$\theta_0 = 0$ と $v_0 = 0$ の点に対して点対称となっており、モデルの持つ対称性を確認することができた。また、図 2.9 も v_0 の絶対値が大きくなればなるほど、つまり E_0 が大きくなればなるほどベイシンの構造は複雑になっている。また、図 2.9 は、図 2.7 を $y_0 = 1$ のところを軸として左側に持っていき、合わせたものとよく似た形をしている。これは、$\omega_0 = 0$ となっているために、v_0、y_0 によらず最初の床との衝突前の角度が $\theta_b = \theta_0$ で決まり、式 (2.35) から y_b も決まる。さらに、衝突前の重心の速度も $v_b = -\sqrt{2(E_0 - y_b)}$ によって決まる。ここで、初期の角速度から、衝突前の角速度は $\omega_b = 0$ と決まる。それ以外の物理量である y_b、v_b、θ_b も初期の角度とエネルギーによって決まり、衝突後の各物理量 y_a、v_b、ω_b、θ_b も式 (2.38)〜(2.40) で決まる。つまり、同じ y_b、v_b、ω_b、θ_b となった時点で、異なる初期条件から出発したコイン・トスは、それ以後同じ軌道にのることを示している。よって、$\omega_0 = 0$ のときに初期エネルギー E_0 と初期の角度 θ_0 を同じくしてトスされたコインは、一回目の床との接触まではそれぞれ違う過程を経ていくが、それ以降のコインの運動は過程を同じくし、当然の結末として、表裏の結果を同じくする。

図2.7 と図2.9 は同じエネルギーの幅でシミュレーションを行ったが、初期の位置によるエネルギーは $E_{y_0} = y_0$ で、初期の速度によるエネル

ギーは $E_{v_0}=\frac{1}{2}v_0^2$ であり、一次関数と二次関数になっている。そのために、図2.9の右半分と左半分は図2.7の上半分を圧縮変形させた形になっている。

いままで、図2.7〜図2.9を見ることにより、断面図上で1本の軸方向にのみ初期エネルギーが変化するものを見てきた。以下、図2.10〜図2.11を見ることにより双方向にエネルギーの変化があるものを見ていく。

y_0-v_0 断面

図2.10は、パラメータ $e=0.75$、$I=\frac{1}{3}$、初期値 θ_0、ω_0 を $\theta_0=\frac{\pi}{4}$、$\omega_0=0$ と固定し、y_0、v_0 を変化させ、縦軸に v_0、横軸に y_0 として、結果により初期値を色分けした。図2.10は $v_0=0$ の直線に対して軸対称である。これは $\omega_0=0$ の場合、モデルが持つ自明な対称性で、$\omega_0=0$ なので最初の接触時の角度 θ_b と角速度 ω_b は決まる。また、式(2.35)より y_b も決まり、接触時の重心の速度も一回目に限っては $v_b=-\sqrt{2(E_0-y_b)}$ となり、E_0 によって決まる。これで、衝突前の y_b、v_b、θ_b、ω_b が決まる。よって、図2.10では、図2.9のときと同様に同じ初期エネルギー E_0 のとき、一回目の接触までは違う過程を経るが、それ以降は同じ軌道にのり、同じ結果を出す。つまり、図2.10では、エネルギーの等高線 $y_0+\frac{1}{2}v_0^2=E_0$ 上では表裏の結果は同じになる。また、今まで見た来たものと同様に、図2.10においても y_0 が大きくなればなるほど、v_0 の絶対値 $|v_0|$ が大きくなればなるほど、つまり、E_0 が大きくなればなるほどベイシンの構造は複雑になっている。

$v_0-\omega_0$ 断面

図2.11は、パラメータ $e=0.75$、$I=\frac{1}{3}$、初期値 y_0、θ_0 を $y_0=0$、$\theta_0=0$ と固定し、v_0、ω_0 を変化させ、縦軸に ω_0、横軸に v_0 として、結

果によって初期値を色分けした。図 2.11 は $\omega_0 \to -\omega_0$ の対称性を持っていることがわかる。$(y_0, v_0, 0, \omega_0)$ と $(y_0, v_0, 0, -\omega_0)$ から出発したコイン・トスの軌道は、y_0 と v_0 がおなじであるために、重心の位置や速度は同じ軌道を通るが、角度と角速度に関しては $\theta_0 = 0$ であるため正の角速度を持って出発した軌道が (θ, ω) とすると、負の角速度で出発したものは $(-\theta, -\omega)$ となる。最終的にシミュレーションを終了した時点でのそれぞれの角度 θ_f と $-\theta_f$ を用いて、棒の向きにより表裏を決めると $\cos\theta_f = \cos(-\theta_f)$ であり、表裏の結果は同じになる。そのため、この対称性は生まれる。また、一部の領域、例えば $v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$ の周りには、結果を表とする非常に大きな領域が存在する。しかし、大まかに見ると、これまで見てきたものと同様に初期のエネルギー E_0 を大きくする、つまり、v_0、ω_0 それぞの絶対値を大きくすると、ベイシンの構造がより複雑になっていくのがわかる。$v_0 = -3.464$ と $v_0 = 3.464$ ではエネルギーに関しては同じだが、$v_0 = -3.464$ では結果を同じくする部分が残っており、$v_0 = 3.464$ よりいく分か結果の予測がしやすくなる。これは、初期の角度 θ_0 によっていると思われる。

$y_0 - \omega_0$ 断面

図 2.12 は、パラメータ $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、初期値 v_0、θ_0 を $v_0 = 0$、$\theta_0 = 0$ と固定し、y_0、ω_0 を変化させ、縦軸に ω_0、横軸に y_0 として、結果が表となるところを白、裏となるところを黒とした。図 2.12 も図 2.11 と同様に $\omega_0 \to -\omega_0$ の対称性を持っていることがわかる。この原因は、図 2.11 で考えた理由と同じでものある。また、y_0 方向に大きくした場合や ω_0 の絶対値を大きくした場合にはベイシンの構造は細かくなっている。つまり、図 2.12 においてもいままで見てきたように E_0 を大きくするとベイシンの構造が複雑になっている。

図 2.12 と図 2.11 の $v_0 > 0$ の部分は互いに似た構造を持っているが、図 2.12 の方が、構造が左側の方に伸びてきている。これは、図 2.12、2.11 が、$\omega_0 = 0$ のとき、同じ幅の初期エネルギー E_0 になっており、上でも述べたように、y_0 によるエネルギーと v_0 によるエネルギーの関数

の違いによるものであろう。また、図2.12と図2.11が似た構造をもつのは、初期の力学的エネルギーE_0と角速度ω_0を同じにした場合には、最初の接触時の角度θ_bが同じであればそれ以降の軌道は同じものとなるからで、ここでは、初期の角度θ_0は一緒だが、棒が床に接触するまでの時間が異なり、最初の接触の角度θ_bは異なっている。しかし、特徴的な構造が似ていることはそういった理由からだと思われる。

概観のまとめ

以上、初期条件空間の典型的な断面をいくつか見てきた。全ての断面に共通しているのは、大まかに見ると、初期のエネルギーE_0を大きくしていった場合、ベイシンの構造が複雑化していることが分かった。このベイシン構造の複雑化は、結果が初期条件により鋭敏に依存することをあらわしている。この初期条件依存性と予測可能性との関係を以下のように考えてみよう。すなわち、モデルは決定論的であり、初期条件を決めれば結果は唯一に定まる。しかし、結果を予測するためには、初期条件に対する精度を考慮しなければならない。つまり、コイン・トスの結果を予測するという行為は、ある精度を伴った初期条件の集合に対して、その精度で選ばれたおのおのの初期条件に対する結果の平均をみることであると考えられる。この意味において、予測可能性は初期値依存性すなわちベイシン構造の複雑さと結びつくのである。ベイシン構造がより複雑な領域においては、結果が予測可能となるための初期条件に対する精度がより高くなるために、結果の予測はより困難になる。逆にベイシンの構造が粗いところでは、結果を予測可能とする初期値の精度は低くなる。つまり、初期条件空間のベイシンの構造の細かさと初期条件に対する精度との大小関係によってコイン・トスが予測可能か否か決まると考えられる。したがって、初期条件空間の断面から得られた初期のエネルギーE_0の増加とともにベイシン構造が複雑化するという傾向は、コインを低い位置からそっと投げれば思い通りの面を出せるという経験的な事実とよく一致していると考えられる。初期のエネルギーE_0がベイシンの構造の複雑さ、

つまり表裏の結果の予測の難しさ、初期値選択の精度に対する表裏の結果の鋭敏さに大きく関係していると思われる。

E_0 が大きいところでの断面

断面の観察を通して、E_0 を大きくするにつれてベイシンの構造が細かくなり、結果の予測が困難になることを確かめた。そこで、相空間内で十分に大きな E_0 となる断面の一例を $y_0-\theta_0$ 断面で見てみよう（図 2.13 参照）。この図では、大まかに見ると、そのほとんどが灰色に見える。この図が、表裏の結果である白、黒のみからなっていることを考えると、決定論的なコイン・トスの結果が "確率的" であることを表しているのではないだろうか。

物質パラメータの変化による相空間への影響

これまで、初期条件空間中に張られる典型的な断面を見てきたが、物質パラメータの変化による相空間への影響を見てみよう。図 2.14、2.15 は図 2.7 での初期値やパラメータのなかで、床との相互作用に関するパラメータである跳ね返り係数 e のみを変えて得た図である。図 2.14 は $e = 0.4$、図 2.15 は $e = 0.95$ となっている。跳ね返り係数を小さくするとベイシンの構造が大まかになり、逆に大きくするとベイシン・バウンダリーの構造が細かくなることが見た目でわかる。跳ね返り係数 e がエネルギー散逸と直接関わっていることを考えると、ベイシンの構造がエネルギーの散逸と大きな関係を持っていることがわかる。それ以外の特徴は図 2.7 と変わることはなく、図 2.7 と同様に $(y_0, v_0, \theta_0, \omega_0, \text{表}) \to (y_0, v_0, \theta_0 + \pi, \omega_0, \text{裏})$ の対称性や、y_0 を大きくした場合ベイシンの構造が細かくなっていく、といったような特徴を同じくしている。

次に、図 2.7 でのパラメータの中で、棒に関するパラメータである慣性モーメント I を変えることで、一様でない棒の場合の初期条件空間の断面を見る。図 2.16、2.17 では、それぞれ $I = 0.1$、$I = 0.9$ として $y_0 - \theta_0$ 断面で初期値による結果をプロットしたものを見た。慣性

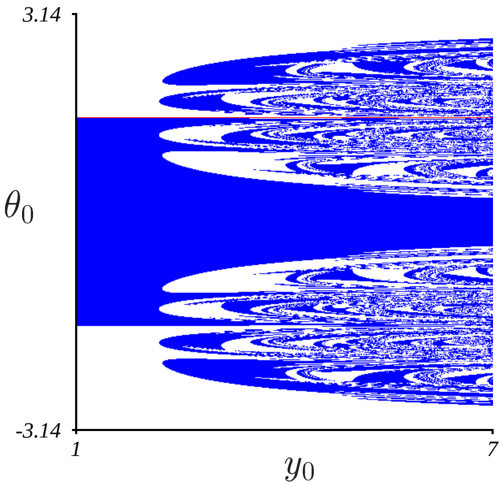

図 2.7: $y - \theta_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$。白：裏、青：表。

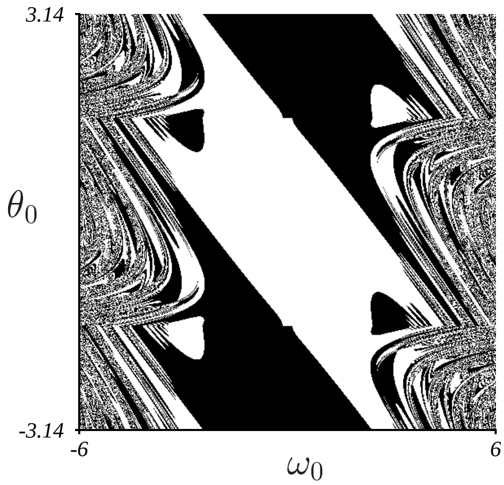

図 2.8: $\omega_0 - \theta_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$y_0 = 1$、$v_0 = 0$。白：表、黒：裏。

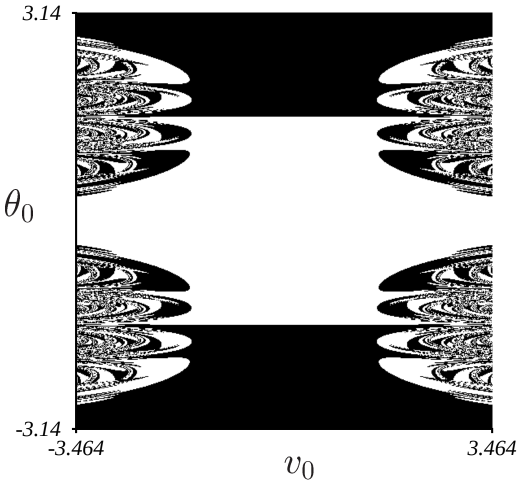

図 2.9: $v_0 - \theta_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$y_0 = 1$、$\omega_0 = 0$。白：表、黒：裏。

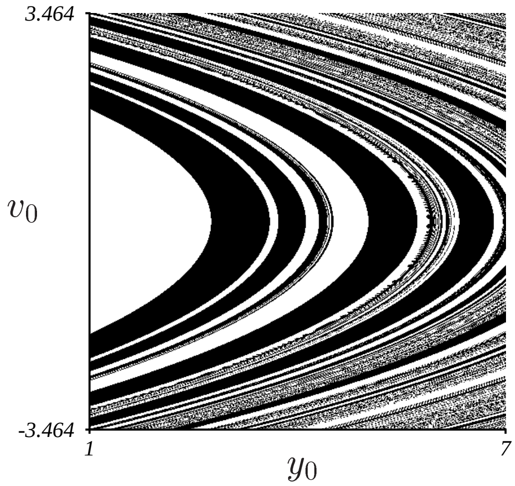

図 2.10: $y_0 - v_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$、$\omega_0 = 0$。白：表、黒：裏。

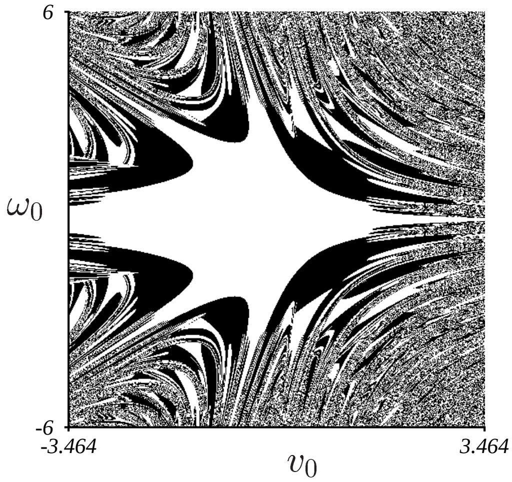

図 2.11: $v_0 - \omega_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$y_0 = 1$、$\theta_0 = 0$。白：表、黒：裏。

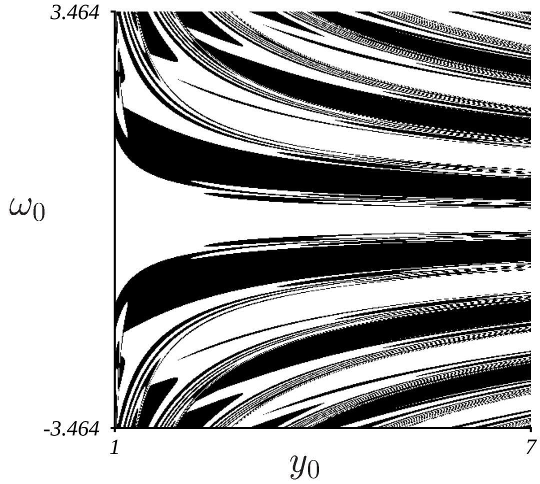

図 2.12: $y_0 - \omega_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\theta_0 = 0$。白：表、黒：裏。

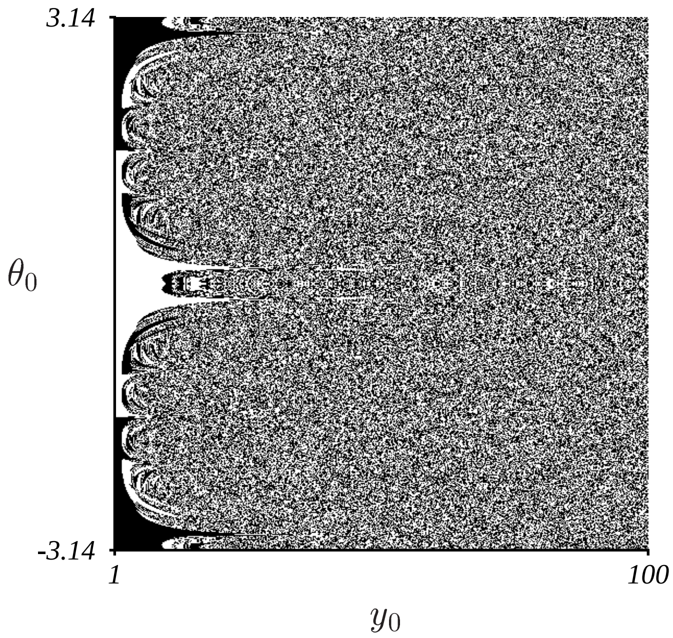

図 2.13: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$. 黒：裏、白：表。

モーメントは棒の持つ回りやすさをあらわす値で、式 (2.15) からもわかるように慣性モーメントの値が小さければ、床から受けた力を回転方向に強く反映し、逆に大きければより弱く反映する。そのため、図 2.7 とのベイシン構造の比較を行うと、図 2.16 では慣性モーメントは小さいため、ベイシン構造は鋭く複雑になっているのに対して、逆に図 2.17 では慣性モーメントは大きいため、ベイシン構造の複雑さは鈍くなっている。

2.2.2 初期条件空間の断面上での ω_0 の効果

図 2.7、図 2.9、図 2.10 で $\omega_0 = 0$ だったものを ω_0 を与えることによって $y_0 - \theta_0$ 断面、$v_0 - \theta_0$ 断面、$y_0 - v_0$ 断面での ω_0 の効果を見る。図 2.7 における初期値のうち ω_0 のみを変えることによって図 2.18、図 2.19 を得た。図 2.18 では $\omega_0 = 0.25$、図 2.19 では $\omega_0 = 0.5$ である。いずれも縦軸に θ_0、横軸に y_0 ととり、図 2.7 のときと同様にして青白をプロット

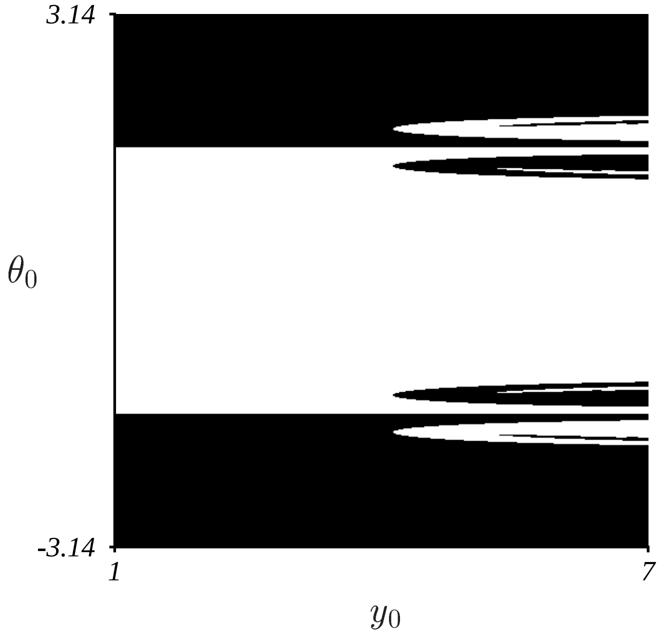

図 2.14: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.4$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$. 黒：裏、白：表。

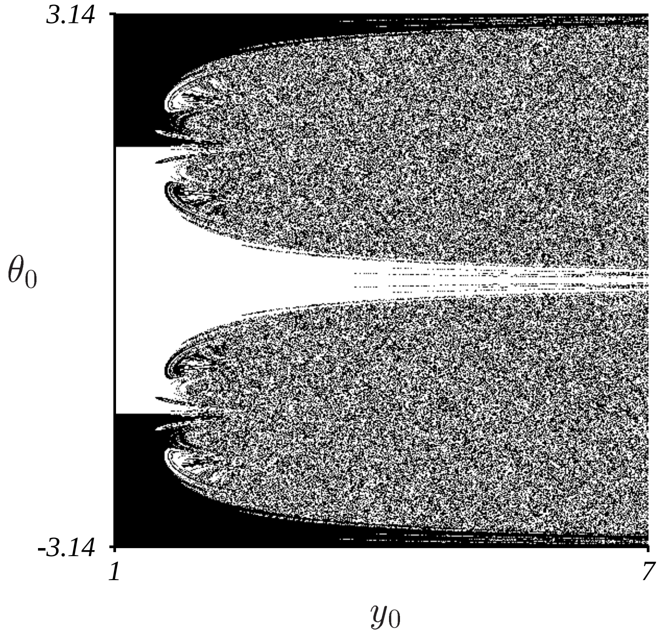

図 2.15: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.95$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$. 黒：裏、白：表。

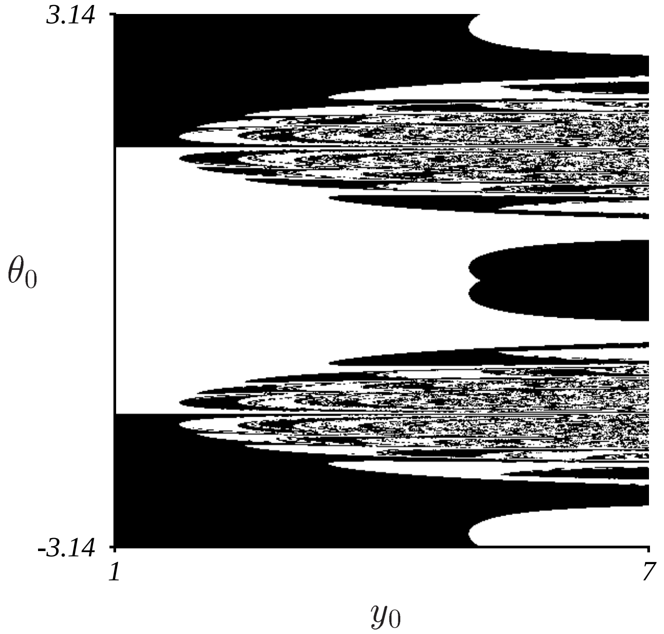

図 2.16: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.75$、$I = 0.1$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$.
黒：裏、白：表。

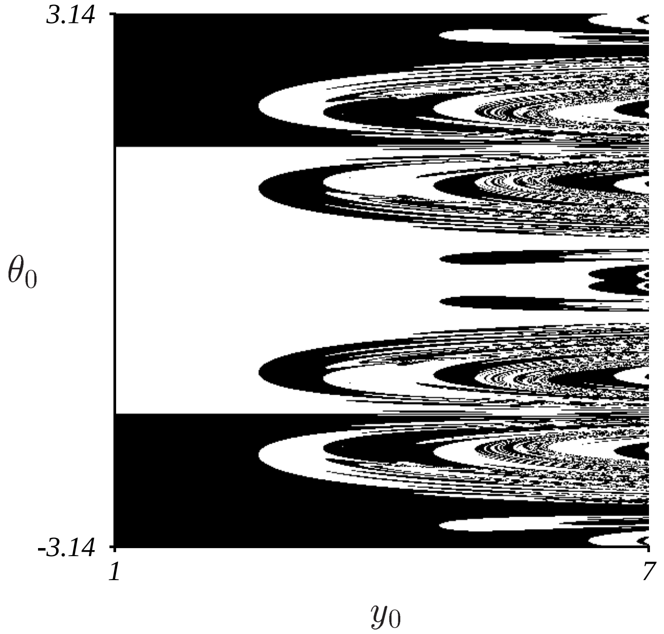

図 2.17: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.75$、$I = 0.9$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$.
黒：裏、白：表。

した。また、図2.9、図2.10における初期値のうち角速度を$\omega_0 = 0.25$とすることでぞれぞれ図2.20、図2.21を得た。図2.18、図2.19においても図2.7と同様に、$(\theta_0, \text{表}) \to (\theta_0 + \pi, \text{裏})$という$\theta_0$に対する対称性を確認することができた。図2.18、図2.19からは、初期の角速度を与えると$\omega_0 = 0$で得た図2.7のベイシンの構造を滑らかに変形させたような形に加えて新たなベイシンの構造ができていることがわかる。図2.7では$\theta_0 = 0$の付近には何の構造もなく、広い部分で同一の結果（表）となっているが、図2.18、図2.19でその部分に対応する部分に新しい構造ができており、少しばかり結果の予測を難しくしているが、まだ広い領域で表裏の結果を同じくする。また、図2.7と同様に図2.18、図2.19からもy_0が大きくなるにつれ、ベイシンの構造が細かくなっており、やはり結果を予測するのは難しくなっている。y_0を大きくするのは、v_0、ω_0を固定しているため、E_0を大きくすることに対応しており、E_0が大きければ大きいほど境界の構造が細かくなることが分かる。

$y_0 - \theta_0$断面で、ベイシンの構造をどの程度変形させたかというのをはかる指標として、図2.7で$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$に存在する境界に着目した。この境界は棒が落下して、初めて床に接触したときに棒が直立している時の初期値とみなすこともできる。このことから、$\omega_0 \neq 0$でのベイシンバウンダリーにも、初めて床に接触する際に、棒が直立している初期値と近似できるものがあると考えた。最初の接触で直立する初期値を任意のω_0に対して計算すると下の式(2.42)になる。

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}(2n+1) - \omega_0\sqrt{2(y_0 - 1)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \quad . \tag{2.42}$$

図2.7、2.18、2.19中の赤い線は式(2.42)から求まる値をプロットしたものであるが、ω_0が大きくなると境界からのずれが大きくなっており、結果の境界とは異なっているが、その変形の度合いを測る目安にはなるだろう。そこで、$\omega_0 = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$として式(2.42)から求まる値をプロットしたものを図2.22で示す。図2.22から、ω_0、y_0が大きくなればなるほどω_0によるベイシンの構造の変形は大きくなっていく。目安ではあるが、構造の変形の幅として式（2.42）から$\omega_0\sqrt{2(y_0 - 1)}$の大きさで変形することが分かる。

図2.20においても図2.9と同様の$(\theta_0, \text{表}) \to (\theta_0 + \pi, \text{裏})$という$\theta_0$方

向の対称性を確認した。また、図2.20においても図2.9のベイシンの構造の滑らかな変形や、それに加えて新しい構造の出現が見て取れる。変形に着目すると$v_0 < 0$の部分と$v_0 > 0$の部分ではベイシンの変形の度合いが異なっている。これは、接触時の角度と初期の角度の差の違いによるものだと思われる。$v_0 < 0$の部分では棒は下向きに速度を持っており、v_0が小さくなればなるほど床と接触するまでの時間が短くなるため接触時の角度が初期の角度θ_0とあまり変わらない。一方、$v_0 > 0$だと棒が上にいく分、接触まで多くの時間を要し接触時の角度と初期の角度との差は大きくなる。図2.9では初期の角速度は$\omega_0 = 0$なので接触時の角度はθ_0と決まっており、その接触時の角度の差が変形を生み出していると考えれば、図2.20における、変形の度合いの違いは納得できる。

図2.21を図2.10と比較することによって、$y_0 - v_0$断面におけるω_0の効果を見てみよう。図2.10では、$v_0 = 0$という直線に対して軸対称であったが、その対称性はω_0を与えることで大きく破れている。また、初期エネルギーが低いところでは、図2.10と同様に広いベイシン構造を持っているように見える。しかし、初期エネルギーが大きくなると構造は細かくなっている。$y_0 - v_0$断面では、ω_0を与えるとベイシンの構造に大きな変化が見られることがわかった。

2.2.3 初期条件空間の断面上でのv_0の効果

$y_0 - \theta_0$断面でのv_0の効果にも触れておこう。$\omega_0 = 0$ならば、v_0を与えることによって生まれる効果はこのモデルから自明である。その効果とは、初期のy方向の重心の速度$v_0 = 0$の断面でのベイシンの構造を、$v_0 = a$という初期のy方向の重心の速度を持つことで、y_0方向に$-\frac{1}{2}a^2$分だけずらしたものが$v_0 = a$の$y_0 - \theta_0$断面上のベイシンの構造となるものである。これは、$\omega_0 = 0$により、最初の接触時の角度と角速度がθ_0、ω_0で決まり、さらに式（2.35）でy_bも決まることにより、最初の接触以降の過程は一回目の接触のv_bによって決まるからで

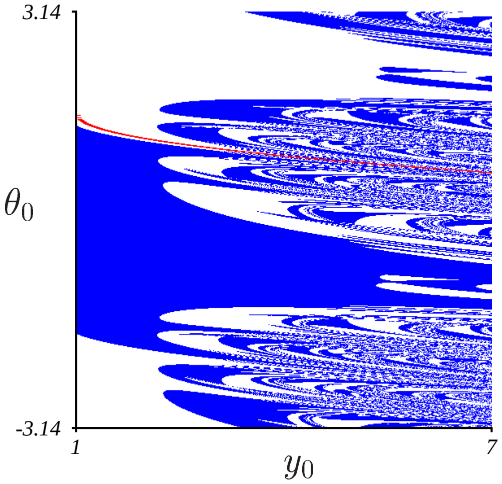

図 2.18: $y - \theta_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0.25$。白：裏、青：表。

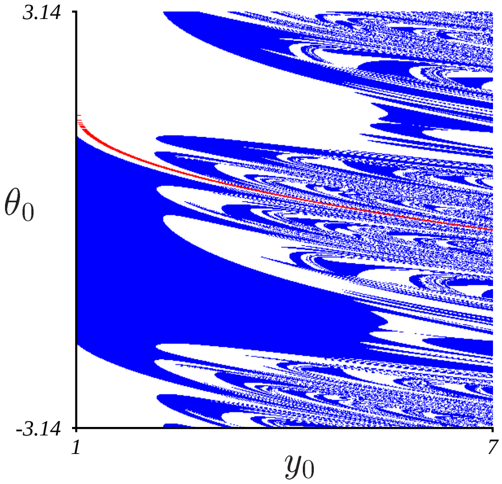

図 2.19: $y - \theta_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0.5$。白：裏、青：表。

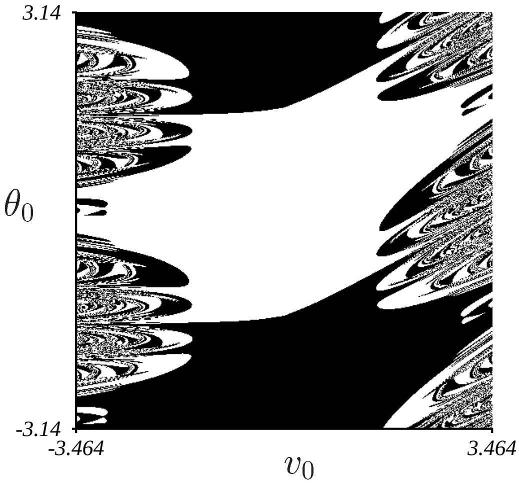

図 2.20: $v_0 - \theta_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$y_0 = 1$、$\omega_0 = 0.25$。白：表、黒：裏。

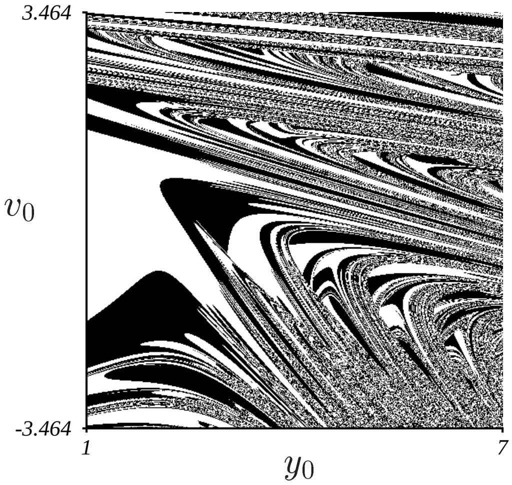

図 2.21: $y_0 - v_0$ 断面。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$\theta_0 = \frac{\pi}{4}$、$\omega_0 = 0.25$。白：表、黒：裏。

ある。この v_b は、最初の接触時の y_b、ω_b が決まっているので初期の力学的エネルギー E_0 によって決まる。よって、$v_0 = a$ の $y_0 - \theta_0$ 断面でのベイシンの構造は、$v_0 = 0$ の $y_0 - \theta_0$ 断面でのベイシンの構造とエネルギーを同じくするように $v_0 = 0$ の $y_0 - \theta_0$ 断面上のベイシンの構造を y_0 方向に $-\frac{1}{2}a^2$ だけずらしたものとなる。この効果は図 2.23 によって確認できる。

図 2.24 は図 2.8 における v_0 のみを変化させて得た図である。これら二つの図を比較することによって、$\omega_0 - \theta_0$ 断面上での v_0 の効果を見ることができるだろう。見比べると、$(\theta_0, \omega_0) \to (-\theta_0, -\omega_0)$ の対称性

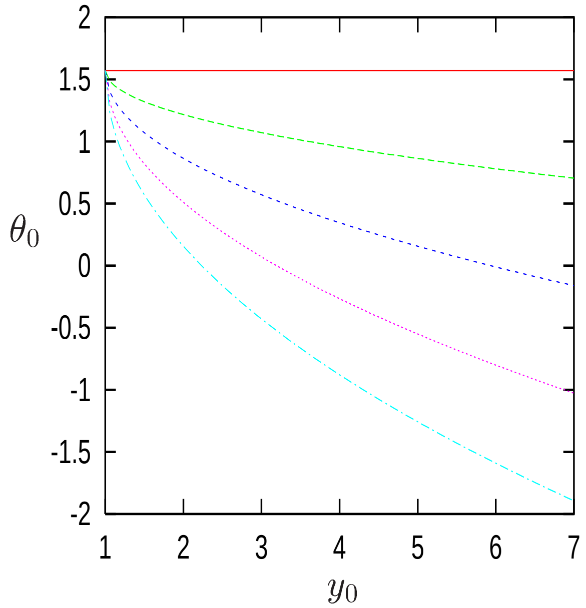

図 2.22: $\omega_0 = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ として式 (2.42) から求まる値をプロットしたもの。それぞれ $\omega_0 = 0$ を赤、$\omega_0 = 0.25$ を黄緑、$\omega_0 = 0.5$ を青、$\omega_0 = 0.75$ を紫、$\omega_0 = 1.$ を水色でしめす。

や $|\omega_0|$ が大きくなるとベイシン構造が複雑になっていくという特徴に変化は無く、変形、伸縮している。

図 2.25 は図 2.12 における v_0 のみを変化させて得た図である。これら二つの図を比較することで、$y_0 - \omega_0$ 断面上での v_0 の効果を見ることができるだろう。見比べると、$\omega_0 - \theta_0$ 断面と同様にベイシンの構造に大きな変化は見られず、$\omega_0 \to -\omega_0$ の対称性や、y_0 を大きくするとベイシン構造が複雑になる特徴は同じである。また、$\omega_0 - \theta_0$ 断面と同様に、ベイシン構造が変形、伸縮していることが見て取れる。

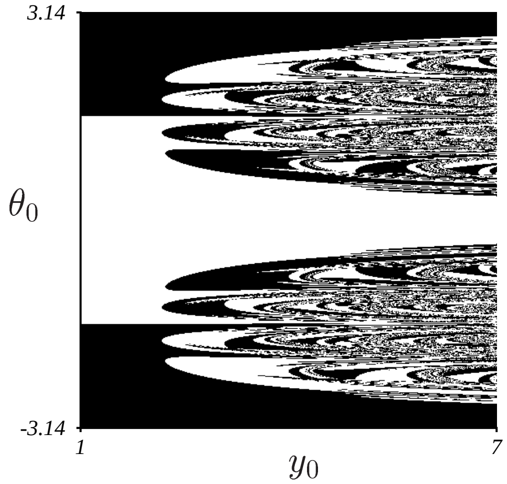

図 2.23: $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0.2$、$\omega_0 = 0$.

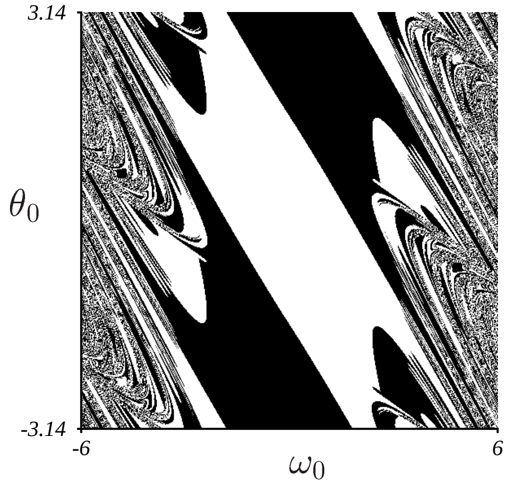

図 2.24: $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$y_0 = 0$、$v_0 = 0.2$.

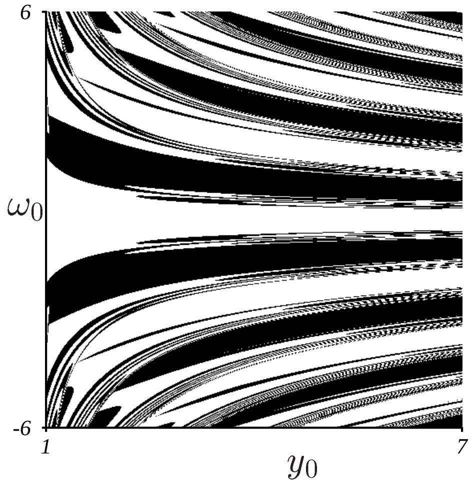

図 2.25: $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0.2$、$\theta_0 = 0$.

2.3　解析

本節では、前節で概観した初期条件空間でのベイシン構造をより詳細にかつ、定量的に解析する。

2.3.1　初期値依存性

コイン・トスの表裏の結果がどの初期値に強く依存するかというのは興味深い問題である。しかし、それぞれが異なる単位を持っており、単純な比較は難しい。そこで、ここでは比較を行う道具として初期のエネルギー E_0 を用いてみよう。これは、図 2.7〜図 2.12 で見たように初期のエネルギーが大きくなれば、ベイシンの構造が複雑になっていることから、境界の複雑さと初期のエネルギーは何らかの関係があると思われる。

初期値によってエネルギーを変えることができるのは θ_0 以外の y_0、v_0、ω_0 である。よって、初期値空間中で断面をとる際に一つの軸を θ_0 と決め、$y_0-\theta_0$ 断面、$v_0-\theta_0$ 断面、$\omega_0-\theta_0$ 断面を調べ、1 方向にそれのみによってエネルギーが増減する断面を見比べることにより y_0、v_0、ω_0 のどの初期値に表裏の結果が依存するかを見てみよう。

図 2.7 と図 2.9 と図 2.8 は、エネルギーにより比較するため初期のエネルギー E_0 の幅が一致しており、$1 \leq E_0 \leq 7$ となっている。ここで、図 2.7 での $y_0=7$ の部分と図 2.8 での $\omega_0=6$ の部分を見比べて欲しい。どちらも対応する図に関しては同じエネルギー $E_0=7$ になっているにもかかわらず、図 2.7 ではまだ結果を同じくする広い領域が認められ、結果の予測をある程度可能なものとしているが、図 2.8 では複雑に入り組んだ構造を持っており、結果を予測するのは図 2.7 の $y_0=7$ のときよりも難しい。また、$\omega_0 \neq 0$ における図 2.18、2.19 で多少 $E_0=7$ よりも大きな初期エネルギーを持つそれぞれの図の $y_0=7$ においても、まだ結果を同じくする広い領域が認められる。このことから、コイン・トスの表裏の結果の初期値依存性は y_0 よりも ω_0 に強く依存しているのではないかという予想がたつ。また、図 2.9 に関しては、上でも述べたが図 2.7 を圧縮した形をしているため図 2.7 と同じ初期エ

ネルギーで見比べればベイシンの構造の複雑さは同じである。そのため、コイン・トスの表裏の結果は y_0 と同様に v_0 よりも ω_0 に強く依存していると思われる。しかし、図 2.7 と図 2.9 と図 2.8 は四次元ある初期値空間中で三つの断面を見比べただけであり、全体的な傾向を言い当てるには至らないだろう。そこで、初期値空間内で 500000 個のサンプルをとり、そのサンプルに y、v、ω 方向に同エネルギー分だけ揺らぎ (δE) を加えて元のサンプルから出発した表裏の結果と、揺らぎを加えたものから出発した表裏の結果が異なる確率を、両対数でプロットした（図 2.26）。δE 分だけ揺らぎを加えることは y、v、ω 方向への揺らぎ δy、δv、$\delta\omega$ では、ぞれぞれ以下の式 (2.43)、(2.44)、(2.45) であらわされる。

$$\delta y = \delta E \quad , \tag{2.43}$$

$$\delta v = -v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2\delta E} \quad , \tag{2.44}$$

$$\delta\omega = -\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{\delta E}{I}}. \tag{2.45}$$

図 2.26 から、ω_0 方向に揺らぎを加えたものが一番結果を変える確率が高く、ω_0 方向への初期値依存性が強いことがわかる。ついで、v 方向、y 方向となっている。図 2.27 では、δE の大きなところでは ω_0 方向に揺らぎを加えたものが一番結果を変える確率が高くなっているが、δE を小さくしていくと v_0 方向に揺らぎを加えたものが ω_0 方向へのものを大きく超えている。一概に、ω_0 方向が最も複雑とは言えない。

2.3.2 ベイシンの構造

ベイシンの構造を詳しく見るために、図 2.7 を $2 < y_0 < 6$、$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ の範囲で拡大したものを図 2.28 で示す。ここで、図 2.28 の θ_0 の範囲はミラーイメージや白黒反転などを行えば、$-\pi < \theta_0 < \pi$ の全ての範囲の構造を表すことができる最低の範囲となっている。例えば図 2.28

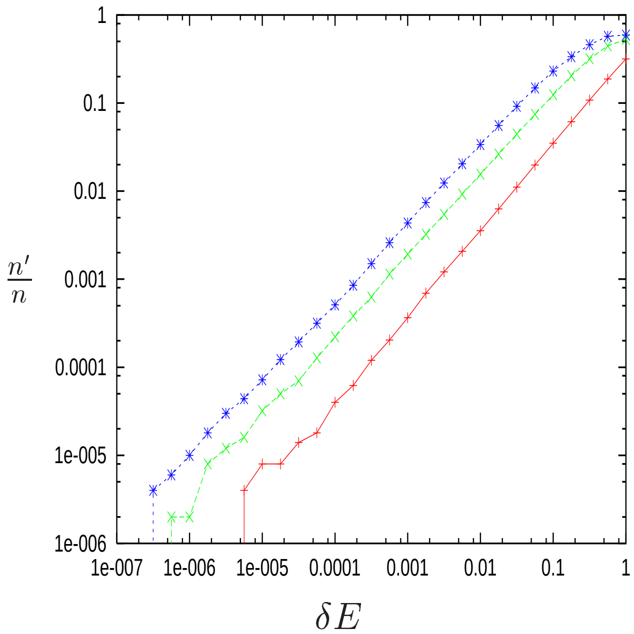

図 2.26: 初期値空間内（$1 < y_0 < 7$、$0 < v_0 < 3.464$、$0 < \theta_0 < \pi$、$0 < \omega_0 < 6$）で揺らぎを正の方向に加えて、表裏の結果が変わった確率をプロットしたもの。縦軸は結果が変わった確率、横軸は加えた揺らぎの大きさで、δE を表している。赤線 (+)、黄緑線 (×)、青線 (∗) はそれぞれ y、v、ω 方向に揺らぎを加えたものをあらわしている。

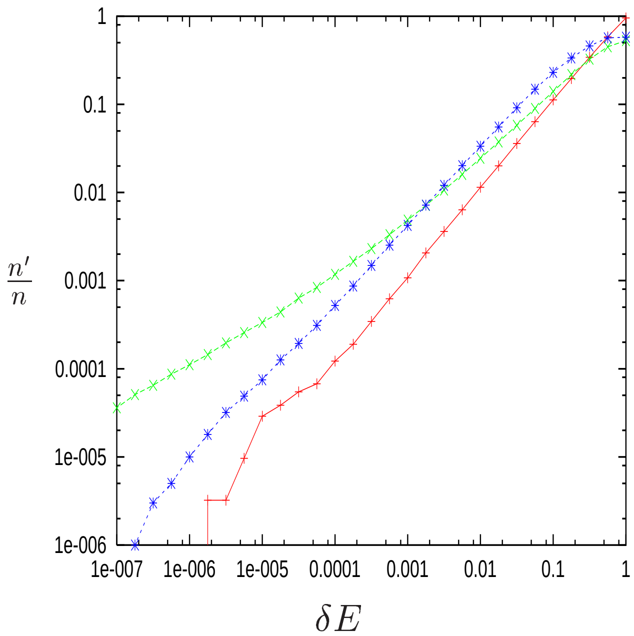

図 2.27: 初期値空間内（$1 < y_0 < 7$、$-3.464 < v_0 < 3.464$、$0 < \theta_0 < \pi$、$-6 < \omega_0 < 6$）で揺らぎを正負の方向に加えて、表裏の結果が変わった確率をプロットしたもの。縦軸は結果が変わった確率、横軸は加えた揺らぎの大きさで、δE を表している。赤線 (+)、黄緑線 (×)、青線 (∗) はそれぞれ y、v、ω 方向に揺らぎを加えたものあらわしている。

を$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$の軸に対して軸対称な図を描き、それを白黒反転させれば、$0 < \theta_0 < \pi$の範囲の図は描ける。また、その図を$\theta_0 = 0$の軸に対して対称な図を描けば$-\pi < \theta_0 < \pi$の範囲、つまりθ_0に関しては全て描けたことになる。

ベイシンの構造を詳しく見るために、図2.28の赤い枠内を拡大したものを図2.29、青い枠内を拡大したものを図2.32で示す。図2.29は、１０倍で構造がかなり単純になっている。一方、図2.33は、１０倍ではまだ複雑な構造が残っている。さらに、詳しく見ていくために図2.29の赤い枠内を拡大したものを図2.30、青い枠内を拡大したものを図2.31で示す。図2.30、図2.31を見る限り、すでに複雑な構造はなくなっており、ある程度の初期値の精度を持ってコイン・トスを行えば、結果を予測することが可能である。よって、図2.28の赤い領域内では、ランダムネスが弱くなっていると言えるのではないだろうか。次に、図2.32を詳しく見ていくために赤い枠内を拡大したものを図2.33で示す。図2.33は、まだ複雑な構造が領域の上の方に残っている。さらに、この複雑な部分を残している赤い枠内を拡大したものを図2.34で示す。まだ、複雑な構造が残っているため、さらに拡大していく。図2.34の複雑な領域内の赤い枠内を拡大したものを図2.35で示す。図2.35はまだ複雑な構造を残しており、図2.28の青い枠でくくった領域では、10000倍しても複雑な構造を保っており、細かい精度をもって初期値の選択を行っても、結果を予想するのは難しく、まだランダムネスを保っているといえるだろう。

ここで、図2.35を見ると10000倍してもまだまだ複雑な構造を保っているため、無限に複雑な構造を持っている、つまり、ベイシンの構造がフラクタルになっているのではないかという疑問が生まれる。ベイシンの構造がフラクタルかどうかは、コイン・トスのランダムネスについて議論する上で、興味深い問題である。なぜなら、もし構造がフラクタルならば、ベイシンが無限に入り組んだ構造を持っていることになり、どれほど正確に初期値を選択できるとしても、その精度が有限である限り、表裏の結果の予測は確率性をもち、コイン・トスはランダムであるといえるからだ。逆に、フラクタルでないならば、ベ

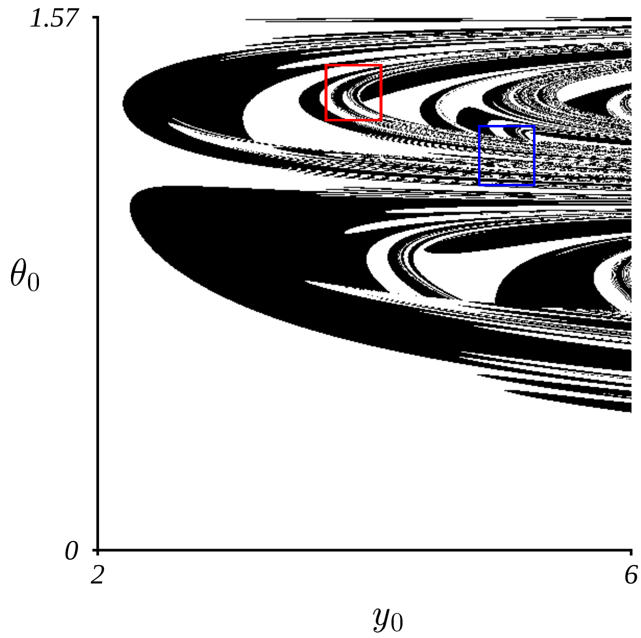

図 2.28: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$. 白：表、黒：裏。赤い枠内を拡大したものが図 2.29、青い枠内を拡大したものが図 2.32。

イシンが有限の細かさの構造を持っていることになり、初期値をその構造の特徴的な大きさよりも小さい精度で選ぶことにより、表裏の結果を予測することができるので、コイン・トスが完全なランダムネスを持つとはいえない。

ここで、どのスケールまでフラクタルかを調べるために境界の次元を測る関数 $f(\epsilon)$ を、n をサンプル数、n' をサンプルとして選んだ初期値に微少量 ϵ を加えて結果が異なった数として、

$$f(\epsilon) = \frac{n'}{\epsilon n} \tag{2.46}$$

のように定義する (文献 [11])。Grebogi らは、境界の次元を測るために関数 $f(\epsilon) = \frac{n'}{n}$ を用いていた。$f(\epsilon) \propto \epsilon^{\alpha}$ という関係があれば、D を空間の次元、d を境界の次元とすると、$\alpha = D - d$ という式を用いて境界の次元を求めることができる。よって、$\alpha = 1$ なら境界の次元 d は $D - 1$ となりフラクタルとはならない。しかし、$\alpha < 1$ となると境界の次元は $D - 1$ よりも大きくなりフラクタルとなる。

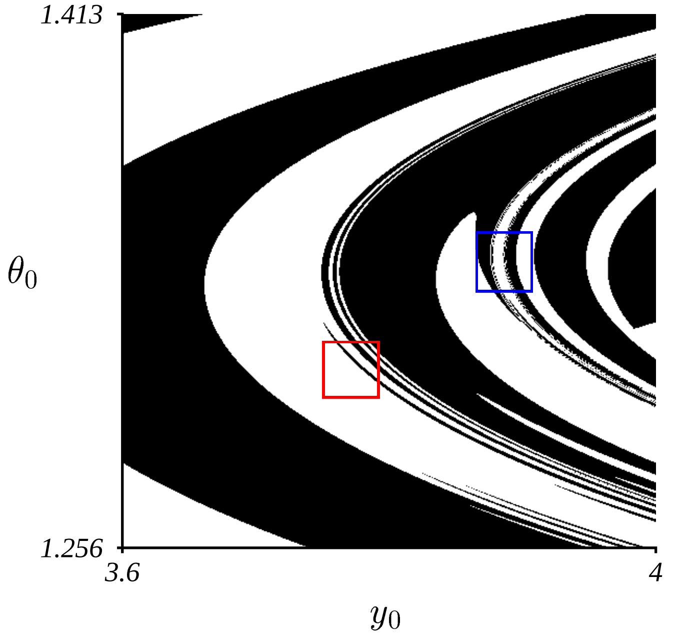

図 2.29: 図 2.28 を１０倍に拡大。白：表、黒：裏。赤い枠内を拡大したのが図 2.30、青い枠内を拡大したのが図 2.31。

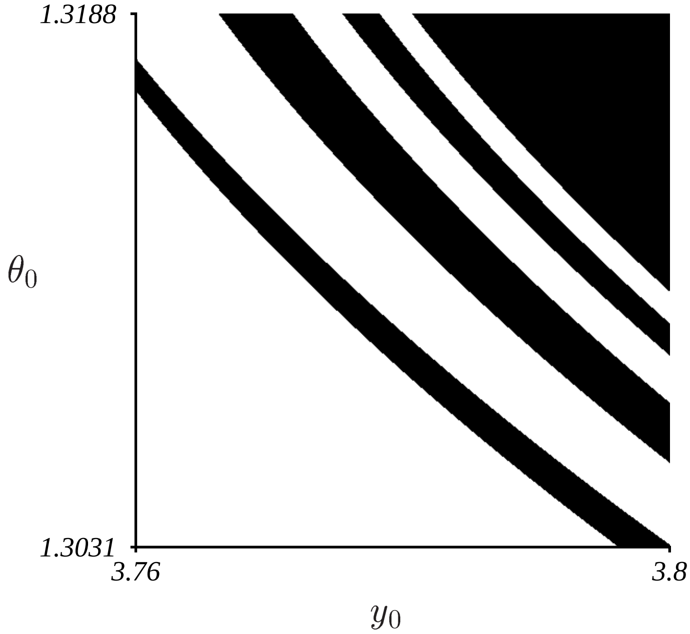

図 2.30: 図 2.29 を１０倍に拡大。白：表、黒：裏。

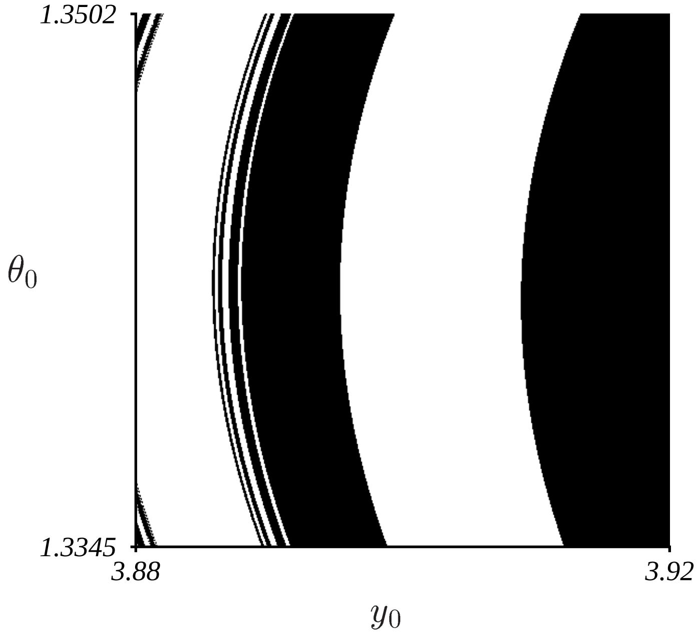

図 2.31: 図2.29を１０倍に拡大。白：表、黒：裏。

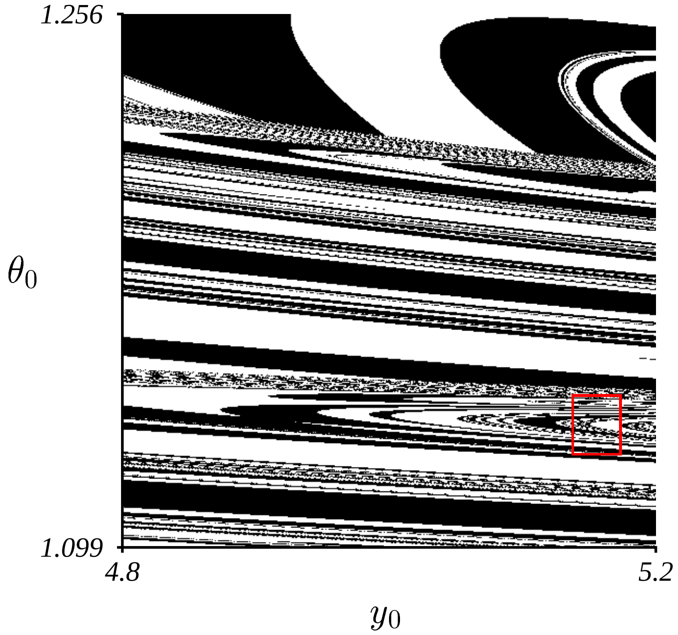

図 2.32: 図2.28を１０倍に拡大。白：表、黒：裏。赤い枠内を拡大したのが図2.33。

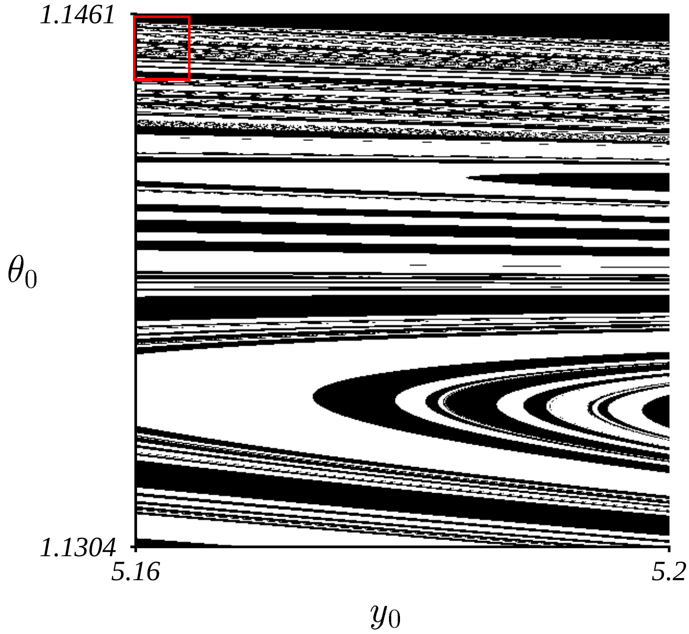

図 2.33: 図 2.32 を１０倍に拡大。白：表、黒：裏。赤い枠内を拡大したのが図 2.34。

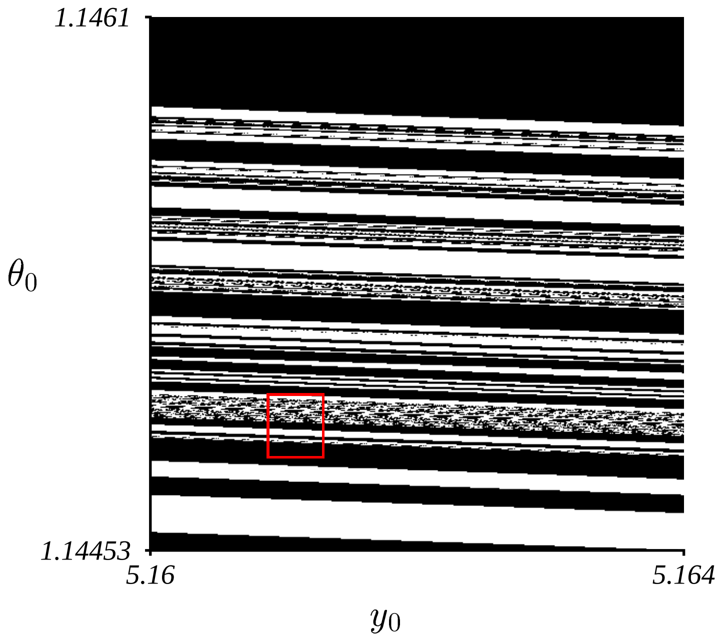

図 2.34: 図 2.33 を１０倍に拡大。白：表、黒：裏。赤い枠内を拡大したのが図 2.35。

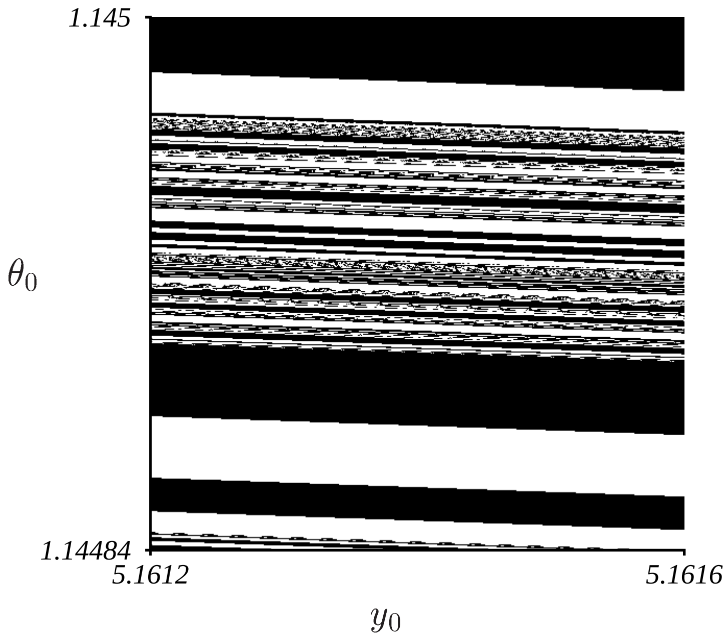

図 2.35: 図 2.34 を１０倍に拡大。白：表、黒：裏。

しかし、本論文では ϵ の小さい部分での境界の構造を見やすくするために、関数 (2.46) を定義する。このとき、フラクタルでないならば両対数プロットしたときの傾き (α) が 0 となり、フラクタルとなっているなら α が 0 より小さくなる。また、揺らぎを加える方向については、様々な初期エネルギーの元での比較を行うために、揺らぎを加えることによって初期エネルギーの変化が起きない θ_0 方向のみとした。

図 2.36、2.37 内におけるフラクタル次元を計ったものが図 2.38 である。図 2.38 を見ると、いずれも、有限の ϵ の部分で $f(\epsilon)$ の傾きは十分０に近くなるといってよく、その ϵ より小さいスケールではフラクタルになっていないことが示される。$f(\epsilon)$ の傾きによって、以下の三つの領域が考えられる。(図 2.39 参照)。

領域 I：ランダム領域。$\alpha = -\frac{1}{2}$。結果の変わる確率が $\frac{1}{2}$ で $f(\epsilon) = \frac{1}{2\epsilon}$ となっている。初期値に対する精度がこの領域内程度であれば結果は予測は不可能となる。

領域 II：フラクタル領域。予測不可能性が変化する領域になっており、初期値に対する精度が ϵ_{c_1} に近ければ予測は難しく、ϵ_{c_2} に近くなれば予測しやすくなる。

領域 III：フラット領域。$\alpha = 0$。初期条件を、十分な精度（その初期条件で、ϵ_{c_2} よりも十分小さな範囲でしか揺るがない）で選べば、ランダムでない結果を得るだろう。

また、ϵ_{c_2} はコイン・トスのランダムネスを特徴付ける数値となると考えられる。なぜなら、ϵ_{c_2} は結果の予測可能と不可能を分ける値となっているからである。ある初期値空間で ϵ_{c_2} を測ることによって、その初期値空間のランダムネスの強さを定義することができ、ランダムネスを定量的に比較するとが可能になる。ここで、図 2.38 で赤線と黄緑線を比較すると、ϵ_{c_2} の値は、赤線の方が小さい値を取る。これは、この二つの領域の E_0 に関しては図 2.36 の方が小さいにもかかわらず図 2.36 の領域のほうが図 2.37 の領域に比べランダムネスが強いことを示している。このことは、ランダムネスの強さと E_0 の大きさの関係が単調でないことを表している。また、領域 II では、べき則に乗らないことも考えられ、マルチフラクタルになっている可能性が考えられる [12],[13]。

2.4 境界近傍と初期条件空間内における「連続性」

コイン・トスのランダムネスについての議論をするうえで、表と裏の結果を分ける境界で何が起こっているかは興味深い。よって、ここでは境界近傍の棒の挙動を詳しく解析しよう。$E < E_c$ となり表裏の結果が決まった時の角度 θ_f に対する初期値のある種の「連続性」を仮定すれば、境界直上に対して一つの予想が立つ。ここで述べた「連続

性」とは、$\lfloor a \rfloor$ は a を超えない最大の整数とすると、

$$\left\lfloor \frac{\theta_f}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor = S_f \tag{2.47}$$

としたときに、

性質 *I*　二つの初期条件を初期条件空間中で近づけたときに、S_f はたかだか *1* しか違わない

性質 *II*　初期条件空間でつながった表（裏）の領域は同じ S_f を持つ

という性質である。つまり、二つの十分に近い初期条件を出発したときの θ_f は π 以下の差しかないということである。この「連続性」があると仮定すれば、π の幅の中で $\cos\theta_f$ の符号を変える、つまり表裏の結果を変える θ_f は $\cos\theta_f = 0$ であり、表裏の結果を変える境界直上では棒が立っているのではないかとの予想が立つ。また、連続性があるとすればその間のベイシン・バウンダリーには $(S_f + \frac{1}{2})$ という半整数が対応付けられる。

この「連続性」は、軌道、すなわち力学法則が連続ならば自明だが、今の場合は違っていて、この性質を持つかどうかは自明ではない。このモデルの中には不連続な操作は少なくとも {接触条件、終了条件、LR のどっちが接触するか} の 3 種あり、各々に対して上で述べた「連続性」が成立するかどうかを考えなければならないが、この「連続性」の解析的な証明はできていないが、成立している例を数値的に示そう。

図 2.40 において、$y_0 - \theta_0$ 断面における S_f を色分けした。この図で、性質 II に関しては大まかではあるが確認できる。しかし、性質 I に関しては、S_f の幅は広くなっており、色分けを見ることで、その性質を持つかどうかの判断をするのは難しい。そこで、「連続性」が成立している典型例として図 2.28 を 10 倍に拡大した図 2.41 において、上図では初期値による表裏の結果を、下図では初期値による S_f を色分けした。下図から、初期条件空間でつながった表（裏）の領域は同じ S_f を持ち、また隣り合う境界の S_f は 1 しか違わないことが見て取れ、こ

のことから S_f は連続的に変化している事がわかる。これは、初期条件空間の中の一例にすぎないが、現在までのシミュレーションの結果で「連続性」を破る結果は見つかっていない。この時、以下の予想が立つ。

1. 境界には $\theta = (S_f + \frac{1}{2})\pi$、$y = 0$、$v_0 = 0$、$\omega = 0$ という不安定解が存在すること
2. 境界近傍を通る軌道は、不安定解（棒が床に垂直に立つ解）の近くに長く滞在してること

境界近傍を通る軌道は不安定解の近くに長く滞在しているのではないか、という予想を立てた。これを数値的に確かめるために、境界近傍でシミュレーションを詳細に行った。図 2.42、図 2.43 は、境界近傍で表と裏の結果を結果を示す代表的な時系列であるが、長時間不安定解、$\theta = \frac{3}{2}\pi$ の近傍に滞在したあと表裏の結果が決まっていることを示している。また、不安定解の近くでは棒が垂直に近く式 (2.41) よりエネルギーのロスが小さくなることが分かる。衝突ごとのエネルギーのロスが少ないため、$E < E_c$ となるためには多くの衝突を要し、衝突回数が増えていることも分かる。(図 2.44 参照)

2.5 異常終了条件と chattering collision

境界近傍でよく観測される結果として異常終了条件について述べる。シミュレーションを行う上で、衝突間に棒が床から受ける力が負になる $T_y < 0$ という非物理的な状況が起きる場合がごくまれにある。図 2.45 で異常終了した初期値のところを白とした。こういった状況は過去の研究においても知られている ([3],[4],[5])、ベイシン・バウンダリーの近傍で、コイン・トスの試行が終わりに近づいているときに起こると考えられている。よって、ベイシンの構造のより複雑な初期条件空間を詳細に調べれば、ベイシンバウンダリーの近傍を詳しく見ることができ、

異常終了している初期値の数も多くなるはずである。図 2.46 はある初期条件空間内のベイシンの構造の複雑な部分を拡大し詳細を見たもので、見た目にも異常終了した数が多いのがわかる。$T_y < 0$ となるのは 1228 個の初期値で、全体の数の 0.467% となっている。Vulovic らによると、*soft collision* という T_y が非常に小さく、衝突間で象限を変えない衝突を多く繰り返し、衝突の時間間隔は指数関数的に短くなっていく *chattering collision* というものがベイシン・バウンダリーに非常に近いところで起きる [3]。これは、図 2.47 から確認できる。表か裏かを決める臨界点は棒を床と垂直な位置にしようとする多くの *chatterint collision* から成っていて、ベイシン・バウンダリーの一方では決して棒が直立までいかず、境界を挟んで反対側では多くの *chattering collision* の後に回転を始め、ひっくり返ってしまう。

文献 [4] では、用いられた物体は二次元のサイコロであるが、この $T_y < 0$ という状況は特に軌道の終わりに向かっているときに起きるとある。この状況下では、同じ角を非常に速い衝突を繰り返し、さいころの角が床にくっついたまま滑り始める (*sliding process*) ことに対応すると説明されている。物理量の微小な変化をもった非常に多くの衝突を繰り返すため、Feldberg らは *sliding process* を微分方程式を用いて表現している。その方程式を終える条件は、(1) エネルギーが結果を変えることができない位にまで小さくなったとき (2) 隣り合う角が床とぶつかったとき (3) 床からの力が正になったときの三つであるとしている。

我々は、こういった状況になった場合には、その時点での角度を θ_f として表裏を決めた。こういった非物理的な状況は、境界近傍以外にはまれにしか存在せず、図 2.45 では初期値の数 512×512 に対して異常終了した数は 424 となっており $\frac{424}{512\times512} \times 100 = 0.162\%$ となっている。そのためこの操作は、今まで見てきた結果に大きな影響はないものと考える。しかし、境界近傍に着目する場合には。その寄与及び性質は重要になるであろう。異常終了条件が起きるための条件は、現時点では不明である。

2.6 エントロピー

結果の乱雑さを測る指標として、エントロピーを測った。エントロピーの式は、d をある初期値の周りの幅、$\mu(d)$ をある初期値の周り幅 d 内で調べたサンプル数、$\mu_H(d)$、$\mu_T(d)$ をそれぞれその範囲の中で表が出た初期値の数、裏が出た初期値の数とすると、

$$H(d) = -\frac{\mu_H(d)}{\mu(d)} log_2 \frac{\mu_H(d)}{\mu(d)} - \frac{\mu_T(d)}{\mu(d)} log_2 \frac{\mu_T(d)}{\mu(d)} \quad (H:\text{表}, T:\text{裏}) \tag{2.48}$$

であらわされる。

エントロピーを測ることで局所的に存在する予測不可能性、特にコイントスの結果がどの初期値に大きく依存するかを見ることができる。初期条件空間中である一点を選びその点のまわりの幅 d の中でサンプルを 100000 個とり表裏の結果の確率を用いてエントロピーを測った。等エネルギーでの乱雑さを見るために同じエネルギーの幅だけ（式(2.43),(2.44),(2.45)）ずらして、コイン・トスの結果がどの初期値に大きく依存するかを見る。図2.48 はそれぞれ y_0、v_0、ω_0 方向のエネルギーが 2.5 となるような初期値を選び、その初期値 $y_0 = 2.5$、$v_0 = 2.2360678$、$\theta_0 = 0.0$、$\omega_0 = 3.872983346$ の周りで $H(d)$ を測ったものである。また、図 2.49 はそれぞれ y_0、v_0、ω_0 方向のエネルギーが 3.0 となるような初期値を選び、その初期値 $y_0 = 3.0$、$v_0 = 2.449489743$、$\theta_0 = 0.0$、$\omega_0 = 4.242620687$ の周りで $H(d)$ を測ったものである。両方の図の中で $+,\times,*$ はそれぞれ、y_0 方向、v_0 方向、ω_0 方向にずれを加えたものをあらわしている。図2.48、2.49 から、ω_0 へ揺らぎを加えたものが、より小さい揺らぎにおいてエントロピーが大きくなっており、コイン・トスの表裏の結果は ω_0 に大きく依存していることがわかる。ついで、v_0、y_0 に依存している。

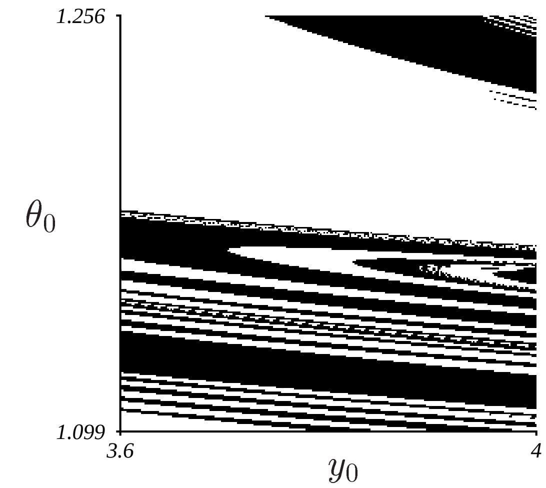

図 2.36: $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0.$、$\theta_0 = 0.$

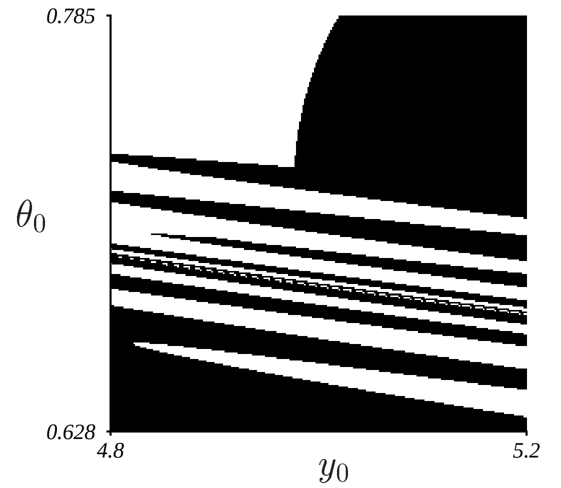

図 2.37: $e = 0.75$、$I = \frac{1}{3}$、$v_0 = 0.$、$\theta_0 = 0.$

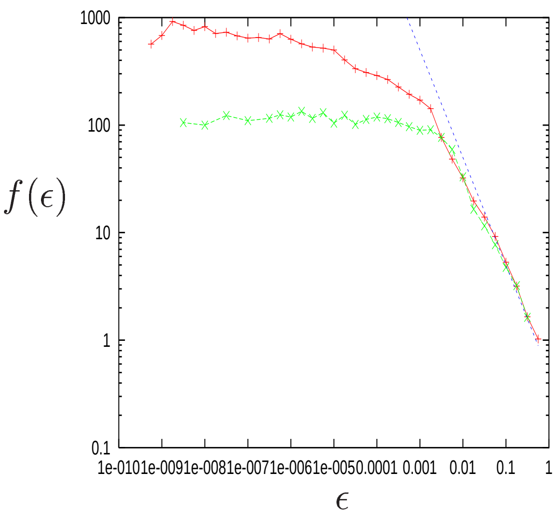

図 2.38: 各領域内での $f(\epsilon)$ をプロットしたもの。各線に対応する領域は、赤線：図 2.36、黄緑線：図 2.37 となっている。青線は傾き $-\frac{1}{2}$ の線である。

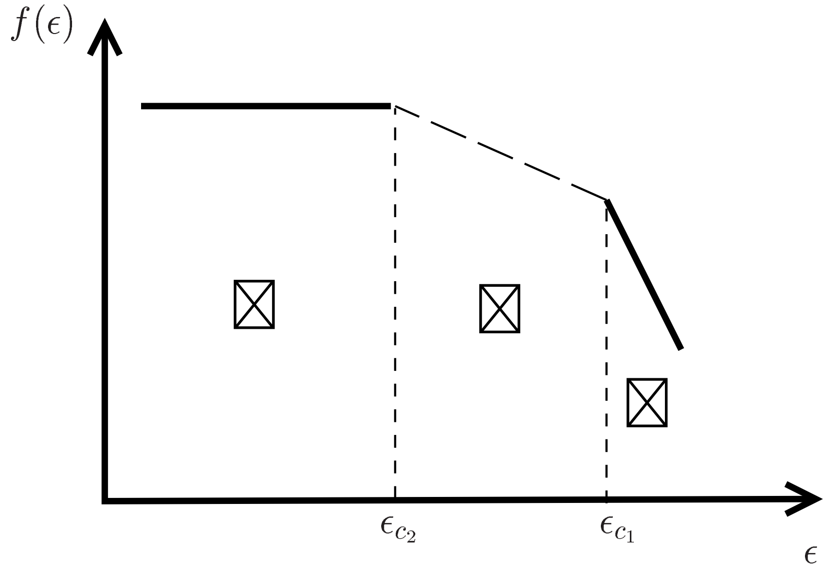

図 2.39: I：ランダム領域、II：フラクタル領域、III：フラット領域

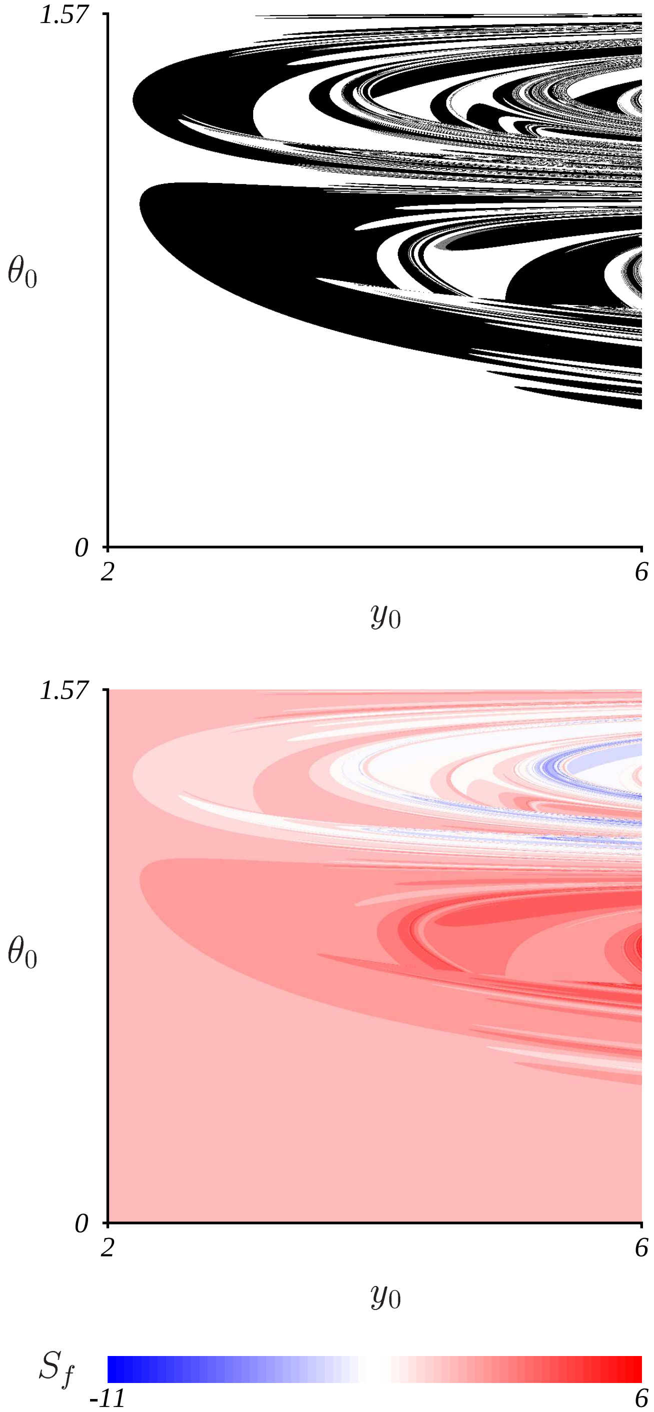

図 2.40: 上図：白：表、黒：裏. 下図：S_f をプロット。

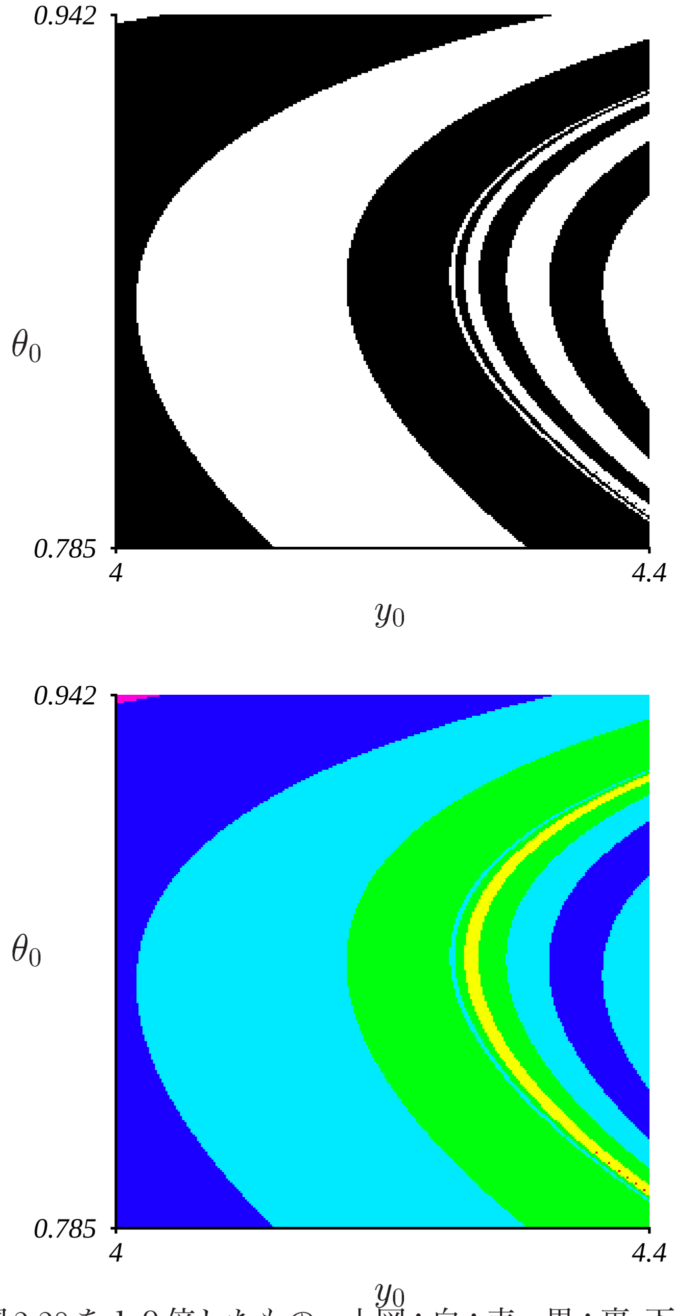

図 2.41: 図2.28を１０倍したもの。上図：白：表、黒：裏. 下図：S_f をプロット。青：１、水色：２、黄緑：３、黄：４、赤：５。

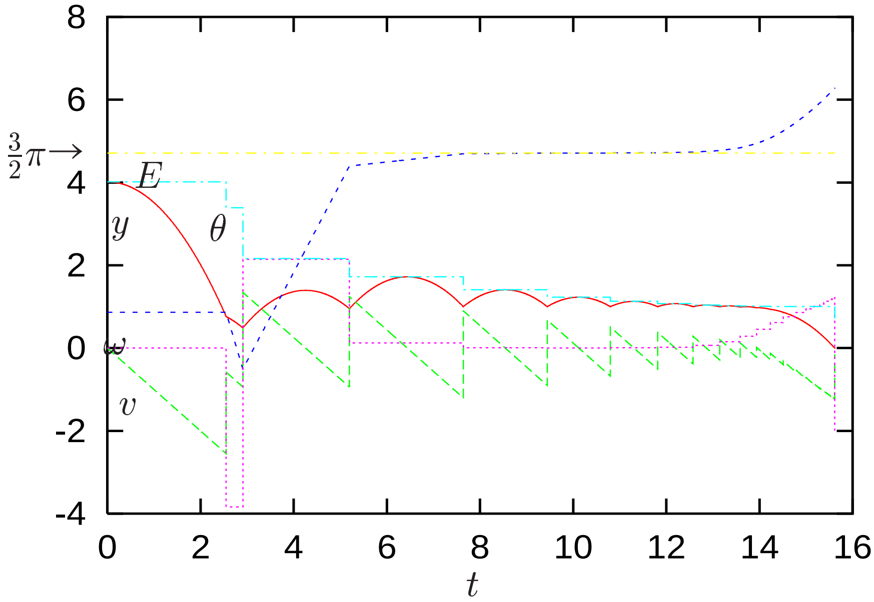

図 2.42: 境界近傍で結果が表となる初期値 $\theta_0 = 0.8635$、$y_0 = 4.015914062$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$ での試行。棒が直立に近づき多数の衝突の後に、直立を超え回転し始めている。

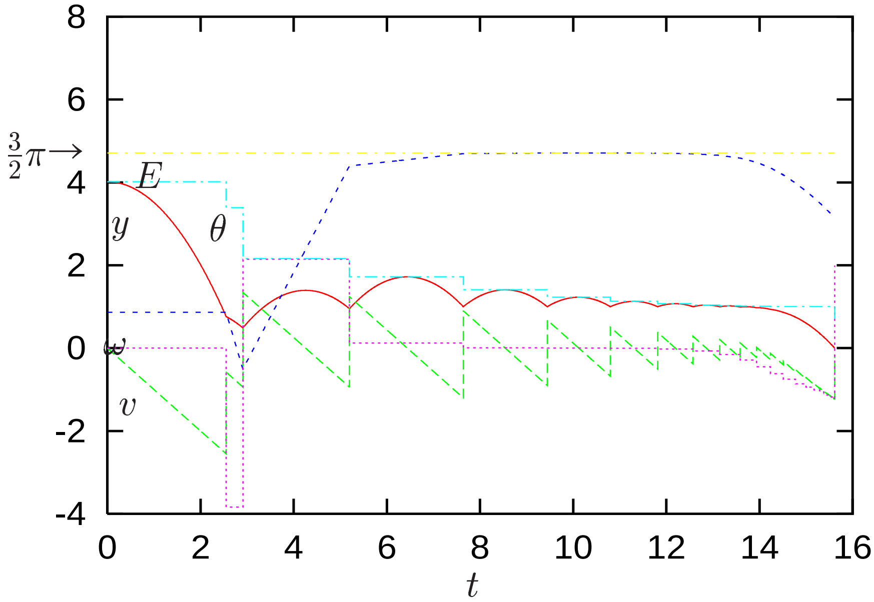

図 2.43: 境界近傍で結果が裏となる初期値 $\theta_0 = 0.8635$、$y_0 = 4.0159127604$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$ での試行。棒が多数の衝突を繰り返し直立に近づくが乗り越えることができずそのままの向きを保ち結果を決めている。

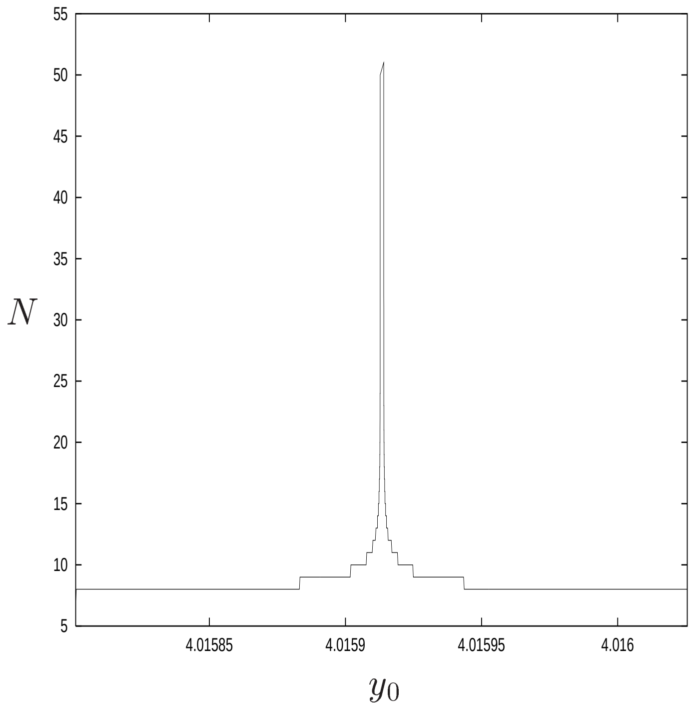

図 2.44: 横軸：y_0、縦軸：衝突回数。

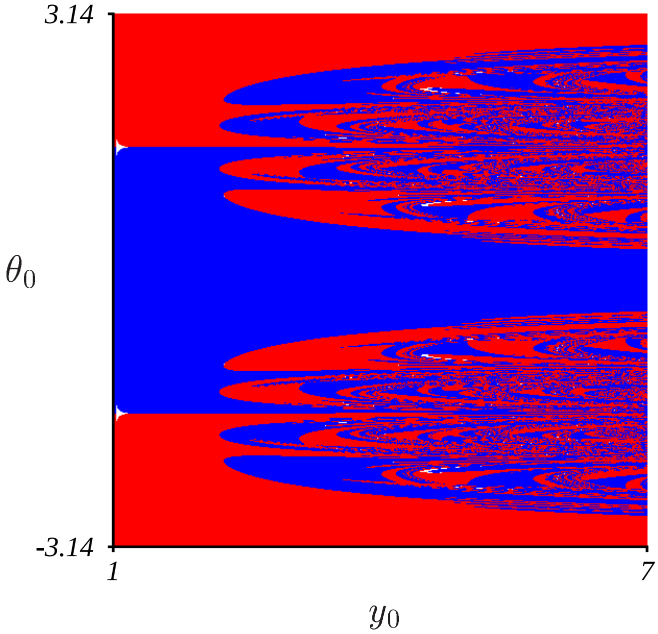

図 2.45: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.75$、$I = 0.3$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$.
赤：裏、青：表、白：$T_y < 0$。

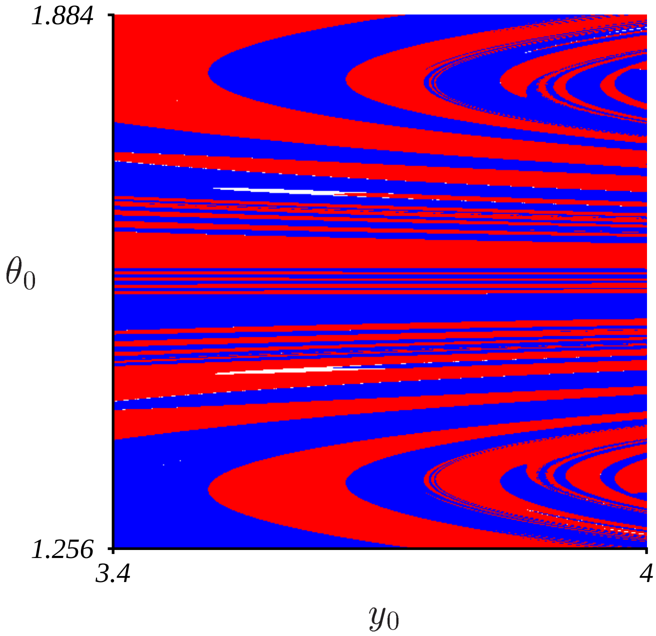

図 2.46: 初期値 $y_0 - \theta_0$ 平面での結果。$e = 0.75$、$I = 0.3$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$.
赤：裏、青：表、白：$T_y < 0$。

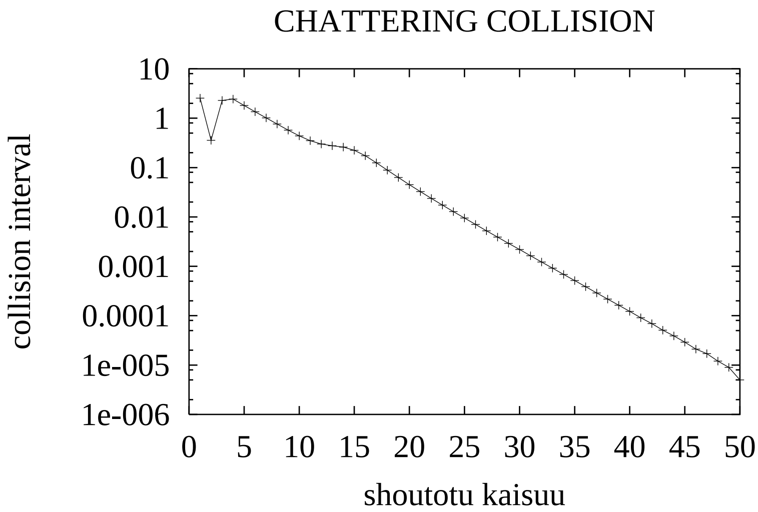

図 2.47: 横軸：衝突回数、縦軸：衝突間隔。衝突の時間間隔が指数関数的に短くなっている。

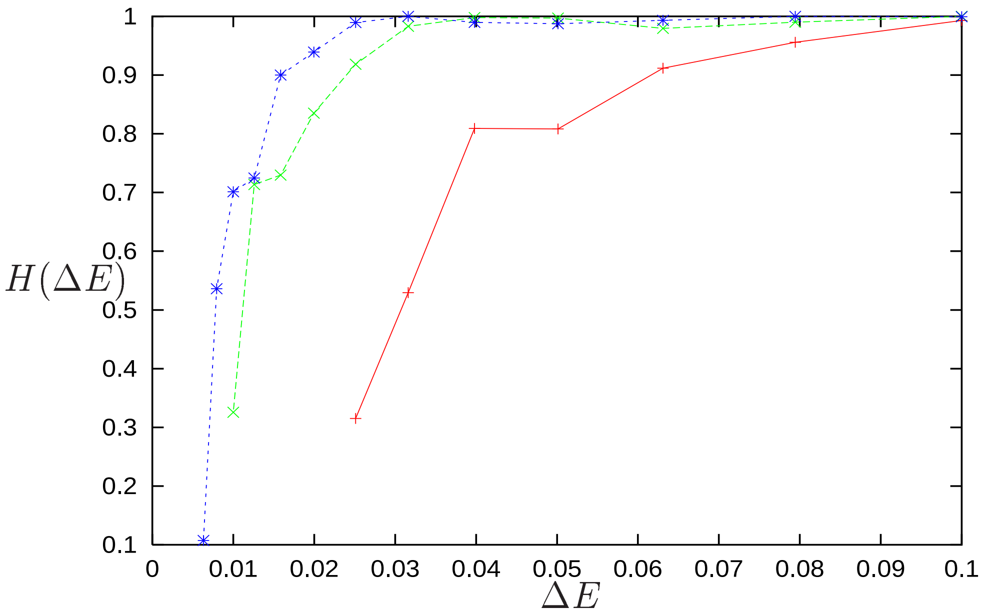

図 2.48: 初期値 $y_0 = 2.5$、$v_0 = 2.2360678$、$\theta_0 = 0.0$、$\omega_0 = 3.872983346$ の周りで $H(\Delta E)$ を測ったもの。$+,\times,*$ はそれぞれ、y_0 方向、v_0 方向、ω_0 方向にずれを加えたもの。

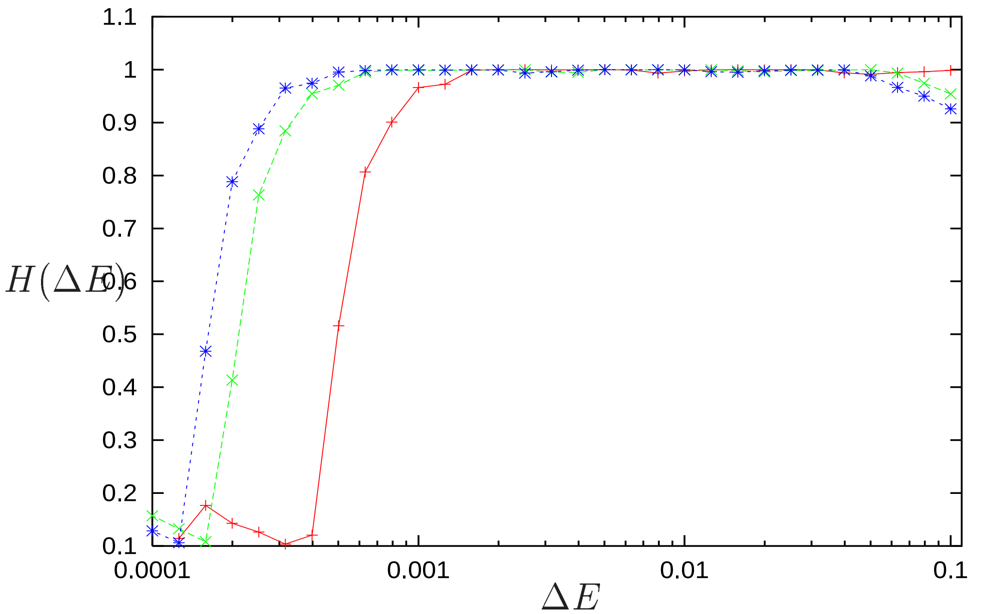

図 2.49: 初期値 $y_0 = 3.0$、$v_0 = 2.449489743$、$\theta_0 = 0.0$、$\omega_0 = 4.242620687$ の周りで $H(\Delta E)$ を測ったもの。$+,\times,*$ はそれぞれ、y_0 方向、v_0 方向、ω_0 方向にずれを加えたもの。

第3章　二次元、ラフな床

3.1　モデル

前章までのモデルをより現実のコインへ近づける方法として、流体の効果を入れる[7]、熱的な揺らぎを入れる、凹凸のある床にするなどがあるが、ここでは床に摩擦を導入してみよう。具体的にはVulovicらのモデル[3]を採用する。
◆自由落下状態での運動方程式、及び◆接触条件については前章と同様とする。

◆衝突過程
衝突前の速度の x 成分を u_b、y 成分を v_b、角速度を ω_b、角度を θ_b、とし、衝突後をそれぞれ u_a、v_a、ω_a、θ_a とし、床とぶつかる端の衝突前の速度の x 成分を U_b,y 成分を V_b、衝突後の速度の x 成分を U_a,y 成分を V_a とすると、

$$U_j = u_j + Ar\omega_j \sin\theta_j \quad , \tag{3.1}$$

$$V_j = v_j - Ar\omega_j \cos\theta_J \tag{3.2}$$

$(j = a, b)$ である。これらを用いると、

$$U_a = U_b + bT_y + cT_x \quad , \tag{3.3}$$

$$V_a = V_b + aT_y + bT_x \quad . \tag{3.4}$$

ここで、$a = 1 + \cos^2\theta_b/I$、$b = -\sin\theta_b \cos\theta_b/I$、$c = 1 + \sin^2\theta_b/I$ である。角運動量の変化より、

$$I(\omega_a - \omega_b) = AT_x r \sin\theta_b - AT_y r \cos\theta_b \tag{3.5}$$

となる。未知変数がU_a、V_a、T_x、T_y、ω_bの五つであることを考えると、残り２つの条件が必要となる。一つは跳ね返りの式、

$$\frac{V_a}{V_b} = -e \quad . \tag{3.6}$$

もう一つは、棒の衝突水平方向成分を考えなければならない。クーロンの法則に従うと仮定すると、接触時の棒の挙動はスティックとスリップの種類がある。

(1) スティックのときは

$$U_a = 0 \tag{3.7}$$

であり、(2) スリップのときは

$$T_x = -sgn(U_b)\mu T_y \tag{3.8}$$

である。これら (3.6)〜(3.8) のうち二つを採用する。

まず、(3.3)〜(3.6)、(3.8) 式を用いて計算すると、

$$U_a = U_b + \frac{(b - \mu c sgn(U_b))(e+1)V_b}{b\mu sgn(U_b) - a} \quad , \tag{3.9}$$

$$V_a = -eV_b \quad , \tag{3.10}$$

$$T_x = \frac{(1+e)\mu sgn(U_b)V_b}{a - b\mu sgn(U_b)} \quad , \tag{3.11}$$

$$T_y = \frac{V_b(1+e)}{b\mu sgn(U_b) - a} \quad , \tag{3.12}$$

$$\omega_a = \omega_b + \frac{Ar(1+e)(\cos\theta_b + \mu sgn(U_b)\sin\theta_b)V_b}{(a - b\mu sgn(U_b))I} \tag{3.13}$$

となる。これは、$T_x = 0$、$\mu = 0$ とすると、前章のスムースな床のモデルになることから、拡張になっている。

この結果、$U_bU_a \leq 0$ となった場合、衝突の間に棒の端の水平方向の速度の向きが入れ替わっていることをあらわしている。Vulovic らは、衝突の間に棒の端の水平方向の速度の向きが入れ替わるのはおかしいと考え、別の衝突過程を追加した。この衝突過程は一つ、もしくは二つの部分に分かれる。すなわち、(3.3)〜(3.5),(3.7),(3.8) 式を用いて計算しなおすと、

$$U_a^{(1)} = 0 \quad , \tag{3.14}$$

$$V_a^{(1)} = V_b + \frac{(a - b\mu sgn(U_b))U_b}{c\mu sgn(U_b) - b} \quad , \tag{3.15}$$

$$T_x^{(1)} = -\frac{\mu U_b sgn(U_b)}{c\mu sgn(U_b) - b} \quad , \tag{3.16}$$

$$T_y^{(1)} = \frac{U_b}{c\mu sgn(U_b) - b} \tag{3.17}$$

となる。ここで、$V_a^{(1)} > 0$ なら、ここで衝突過程は終わり、$V_a < 0$ なら衝突過程の二つ目の部分が始まり、上で求めた値と式(3.3)〜(3.7) を用いて計算しなおすというもので、計算すると

$$U_a^{(2)} = 0 \quad , \tag{3.18}$$

$$V_a^{(2)} = -eV_a^{(1)} \quad , \tag{3.19}$$

$$T_x^{(2)} = -\frac{aU_a^{(1)} - bV_a^{(1)}(e+1)}{b^2 - ac} \quad , \tag{3.20}$$

$$T_y^{(2)} = \frac{V_a^{(1)}(e+1) - bU_a^{(1)}}{b^2 - ac} \tag{3.21}$$

となる。

3.2 シミュレーション

第二章と比べ初期条件空間は４次元から６次元と増えた。しかし、x_0 は結果を決める過程とは無関係なので考える必要はなく、実質５次元の初期条件空間を考えればよい。ここでは、第二章で見た六つの断面を $u_0 \neq 0$ として見ることで、摩擦なしのモデルとの比較を行う。それぞれ $u_0 = 0$、$u_0 = 2$、$u_0 = -2$ における六つの断面の比較により、断面に対する水平方向の速度の影響を見る。第二章と同様に、３つの初期値を固定することで張られる２次元断面上を適当な範囲で５１２等分した各点を初期条件とし、その結果によって初期条件を色分けすることによって以下の相図を得た。

表 3.1: パラメータ $I = \frac{1}{3}$、$e = 0.75$、$\mu = 0.1$ での初期条件空間の断面分類

図 No.	x_0	u_0	y_0	v_0	θ_0	ω_0
図 3.1	0	0	$1 < y_0 < 7$	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 3.2	0	0	1	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.3	0	0	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 3.4	0	0	$1 < y_0 < 7$	$-3.464 < v_0 < 3.464$	1.256	0
図 3.5	0	0	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	0	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.6	0	0	$1 < y_0 < 7$	0	0	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.7	0	2.0	$1 < y_0 < 7$	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 3.8	0	2.0	1	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.9	0	2.0	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 3.10	0	2.0	$1 < y_0 < 7$	$-3.464 < v_0 < 3.464$	1.256	0
図 3.11	0	2.0	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	0	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.12	0	2.0	$1 < y_0 < 7$	0	0	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.13	0	-2.0	$1 < y_0 < 7$	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 3.14	0	-2.0	1	0	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.15	0	-2.0	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	$-3.14 < \theta_0 < 3.14$	0
図 3.16	0	-2.0	$1 < y_0 < 7$	$-3.464 < v_0 < 3.464$	1.256	0
図 3.17	0	-2.0	1	$-3.464 < v_0 < 3.464$	0	$-6 < \omega_0 < 6$
図 3.18	0	-2.0	$1 < y_0 < 7$	0	0	$-6 < \omega_0 < 6$

$y_0 - \theta_0$ 断面

図 3.1 は縦軸 θ_0、横軸を y_0 として、上のラフな床に対するモデルで計算させた結果が表となる初期値のところを白、裏となるところを黒としたものである。この図は摩擦なしのときの $y_0 - \theta_0$ 断面をみた図 2.7 と同様に $(y_0, v_0, \theta_0, \omega_0, 表) \rightarrow (y_0, v_0, \theta_0 + \pi, \omega_0, 裏)$ の対称性や、$\theta_0 = 0$ の軸に対しての軸対称性を保っている。また、y_0 を大きくする、つまり E_0 を大きくするとベイシンの構造が細かくなるという特徴も同じである。

異なる点を上げると、見た目ではあるが、ベイシン構造が 2.7 よりも粗くなっている点があげられるだろう。これはエネルギーの散逸が垂直方向の跳ね返りによるものだけでなく、摩擦によっても生まれていることから起きていると予想される。図 3.1 における初期条件の中で u_0 を $u_0 = 2$、$u_0 = -2$ と変えて図 3.7、3.13 を得た。これらの図から、

図 3.1 のなかで確認できた軸対称性が破れていることがわかる。これは、床と接触する棒の端の水平方向の速度の向きと摩擦の関係によるものだと思われる。また、図 3.7 を上下反転させると図 3.13 と重なることから、このモデルの持つ $(u_0, \theta_0) \to (-u_0, -\theta_0)$ という対称性を確認できた。

$\omega_0 - \theta_0$ 断面

図 3.2 は縦軸を θ_0、横軸を ω_0 として、結果により初期値を色分けしたものである。この図は摩擦なしのときの $\omega_0 - \theta_0$ 断面をみた図 2.8 と同様に $(\theta_0, \omega_0) \to (-\theta_0, -\omega_0)$ の対称性を確認できる。また、$|\omega_0|$ を大きくするとベイシンの構造が細かくなるという特徴も図 2.8 と同じである。異なる点は、摩擦を加えたほうが $y_0 - \theta_0$ 断面と同様にベイシンの構造が粗くなっている点である。

図 3.2 における初期条件の中で u_0 を $u_0 = 2$、$u_0 = -2$ と変えて図 3.8、3.14 を得た。これらの図は図 3.2 で確認できた対称性が破れていることが確認できる。これは $y_0 - \theta_0$ 断面と同様に、床と接触する棒の端の水平方向の速度の向きと摩擦の関係によるものだと思われる。図 3.8 では、$\omega_0 > 0$ の部分では図 2.8 とベイシン構造の形などに大きな変化はない。しかし、$\omega_0 < 0$ の部分では図 2.8 と明らかに異なる点があり、図 3.7 中で矢印 $(\Rightarrow)$ を用いて示している部分などに、滑らかでない構造を突然見つけることができる。これは、モデルの衝突過程における不連続性の特徴を反映したものであると考えられる。

また、図 3.8 と図 3.14 を見比べると、$(u_0, \theta_0, \omega_0) \to (-u_0, -\theta_0, -\omega_0)$ という対称性が見て取れる。この対称性は、モデルが持つ対称性である。

$v_0 - \theta_0$ 断面

図 3.3 は、縦軸を θ_0、横軸を v_0 として、結果により初期値を色分けしたものである。摩擦なしの場合と同様の理由から $y_0 - \theta_0$ 断面の図 3.1 を圧縮変形させた形になっていること、$\theta_0 = 0$ と $v_0 = 0$ の軸に対して軸対称となっていること、v_0 の絶対値が大きくなればなるほど、つまり E_0 が大きくなればなるほどベイシンの構造は複雑になっていることなどの摩擦なしの場合に $v_0 - \theta_0$ 断面を見た図 2.9 と同様の特徴が挙げられる。また、異なる点はベイシンの構造が粗くなっていることがあげられ、これは $y_0 - \theta_0$ 断面での理由と同じであると考えられる。

図 3.3 における初期条件の中で u_0 を $u_0 = 2$、$u_0 = -2$ と変えて図 3.9、3.15 を得た。これらの図から、$y_0 - \theta_0$ 断面と同様の特徴を持っており、図 3.3 のなかで確認できた軸対称性が破れていることがわかる。これは、床と接触する棒の端の水平方向の速度の向きと摩擦の関係によるものだと思われる。また、図 3.7 を上下反転させると図 3.13 と重なることから、このモデルの持つ $(u_0, \theta_0) \to (-u_0, -\theta_0)$ という対称性を確認できた。

$y_0 - v_0$ 断面

図 3.4 は、縦軸を v_0、横軸を y_0 として、結果により初期値を色分けしたものである。図 2.10 との比較を行うと、ベイシン構造が粗くなっていることが分かる。これは、$y_0 - \theta_0$ 断面のときと同様にエネルギーの散逸が関連していると予想される。また、摩擦なしのモデルで確認できた対称性も保たれている。これは、この対称性の起源によるものである。この起源とは、(y_0, v_0) と $(y_0, -v_0)$ から出発したものを考えると、$\omega_0 = 0$ のためにまったく同じ条件で床と接触することである。

図 3.10 における初期条件の中で u_0 を $u_0 = 2$、$u_0 = -2$ と変えて図 3.10、3.16 を得た。この 2 つの図も、$v_0 = 0$ の軸に対しての軸対称性を保っていることがわかる。しかし、この 2 つの図はベイシンの構造

の細かさという点で大きく異なっている。これは、図3.7、3.13や図3.9、3.15で見られたθ_0方向の対称性の破れによって起きている。図3.7と図3.13の$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$の部分を比較すると、図3.7の方がベイシンの構造がより大まかになっておりその特徴を反映した結果である。

$v_0 - \omega_0$ 断面

図3.5は、縦軸をω_0、横軸をv_0として、結果により初期値を色分けしたものである。摩擦なしでの$v_0 - \omega_0$断面である図2.11との比較を行う。$v_0 > 0$の部分ではベイシンの構造の特徴に大きな変化はなく、粗くなっている程度である。これは上で述べたようにエネルギーの散逸と関係していると思われる。また、$v_0 < 0$の部分では大きく異なっている。図2.11では細かいベイシンの構造が見られたが、図3.5では結果を同じくする広い領域が認められる。また、対称性という点では、図2.11と同様に$\omega_0 = 0$軸に対しての軸対称性を持っている。

図3.5における初期条件の中でu_0を$u_0 = 2$、$u_0 = -2$と変えて図3.11、3.17を得た。図3.11、3.17は図3.5より細かなベイシンの構造を持っている。また、上で述べた軸対称性は破れており、これは床と接触する棒の端の水平方向の速度の向きと摩擦の関係によるものだと思われる。しかし、２つの図を比較すると、$(u_0, v_0, \omega_0) \to (-u_0, v_0, \omega_0)$の対称性があることが分かる。図3.11中で矢印($\Rightarrow$)を用いて示している部分などに、滑らかでない構造を突然見つけることができる。これは、モデルの衝突過程における不連続性の特徴を反映したものであると考えられる。

$y_0 - \omega_0$ 断面

図3.6は、縦軸をω_0、横軸をy_0として、結果により初期値を色分けしたものである。摩擦なしの場合の$y_0 - \omega_0$断面の図2.12と比較するとベイシンの構造の特徴に大まかな変化は無く$\omega_0 = 0$の軸に対する

軸対称性は保たれており、細かさが粗くなっている点が異なっているくらいだろう。この違いは、上で述べたようにエネルギーの散逸に関連していると思われる。

図3.6における初期条件の中でu_0を$u_0 = 2$、$u_0 = -2$と変えて図3.12、3.18を得た。$v_0 - \omega_0$と似たような特徴を持っているようだ。断面図3.12、3.18は図3.6より細かなベイシンの構造を持っており、また、上で述べた軸対称性は破が存在し、それは床と接触する棒の端の水平方向の速度の向きと摩擦の関係によるものだと思われる。しかし、２つの図を比較すると、$(u_0, y_0, \omega_0) \to (-u_0, y_0, \omega_0)$の対称性があることが分かる。

概観のまとめ

これまで見た断面では、摩擦なしのときよりもベイシンの構造が粗くなっていた。これは、エネルギーの散逸が鉛直方向の跳ね返り係数によるもの関係している。床が摩擦を持つことによってベイシンの構造が簡単になったり、対称性が破れたりした。ここでは、これらの原因は何にあるか考えたい。まず、ベイシン構造の複雑さが弱くなるのは上でも述べたが、エネルギーの散逸が摩擦によっても起こることに起因していると考えられる。次に対称性の破れについて。これは、棒の水平方向の速度に関係していると考えられる。図3.7の$0 < \theta_0 < \pi$の部分を見ると、$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$の部分よりも$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$の部分のほうがベイシンの構造は簡単になっており対称性を破っている。

3.3 モデルの残す課題

初期条件空間に見られた不連続性は衝突過程の中の摩擦の扱いに起因しており、未解決な問題であるが、跳ね返りに関しても未解決な部分が多々ある。垂直方向の跳ね返りに関しては、文献[15]では球が斜めに衝突する際、跳ね返り係数が1を超えるという実験を報告してお

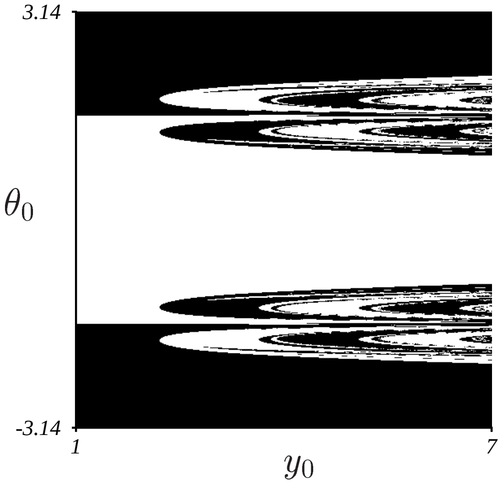

図 3.1: $y - \theta_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 0$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$。白：表、青：裏。

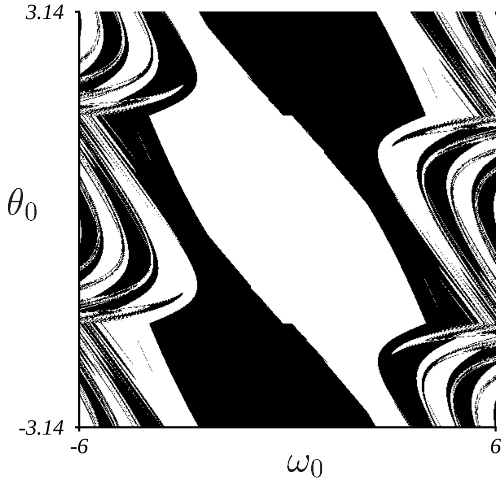

図 3.2: $\omega_0 - \theta_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 0$、$y_0 = 1$、$v_0 = 0$。白：表、黒：裏。

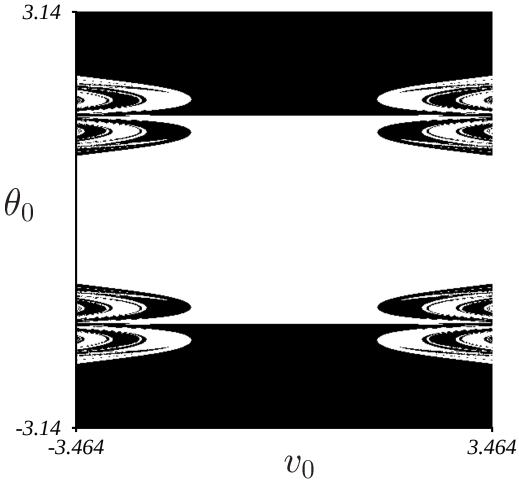

図 3.3: $v_0 - \theta_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 0$、$y_0 = 1$、$v_0 = 0$。白：表、黒：裏。

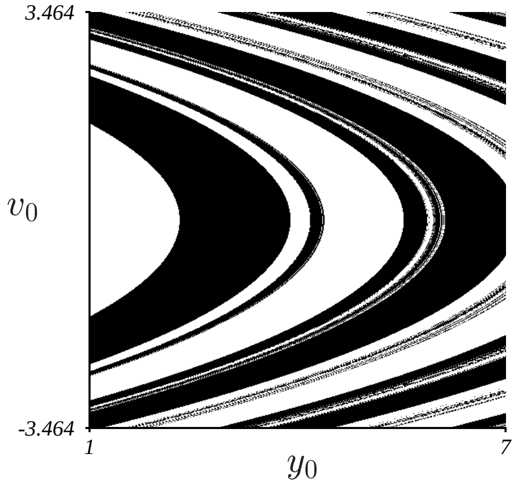

図 3.4: $y_0 - v_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 0$、$\theta_0 = 1.256$、$\omega_0 = 0$。白：表、黒：裏。

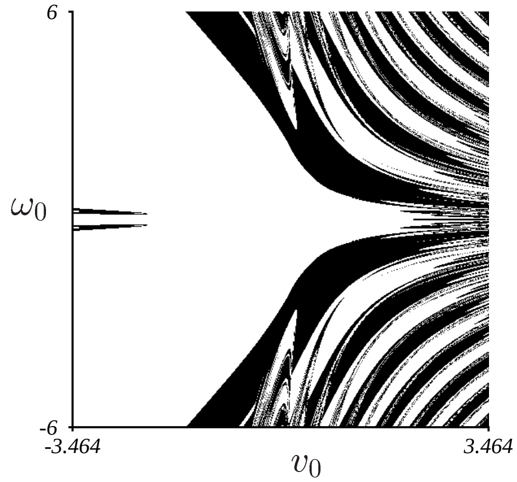

図 3.5: $v_0 - \omega_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 0$、$y_0 = 1$、$\theta_0 = 0$。白：表、黒：裏。

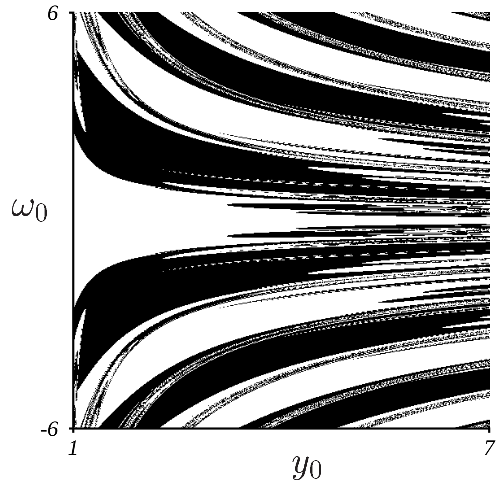

図 3.6: $y_0 - \omega_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 0$、$v_0 = 0$、$\theta_0 = 0$。白：表、黒：裏。

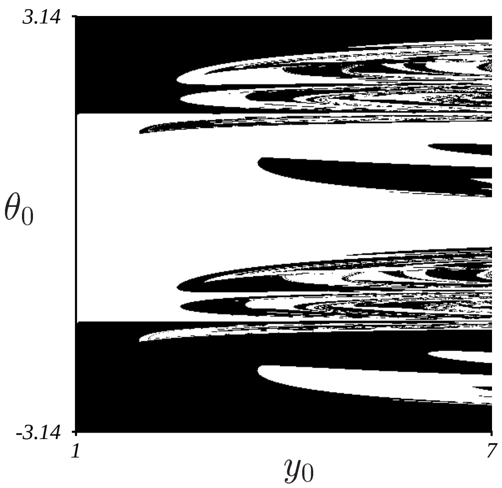

図 3.7: $y - \theta_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 2$、$v_0 = 0$、$\omega_0 = 0$。白：表、青：裏。

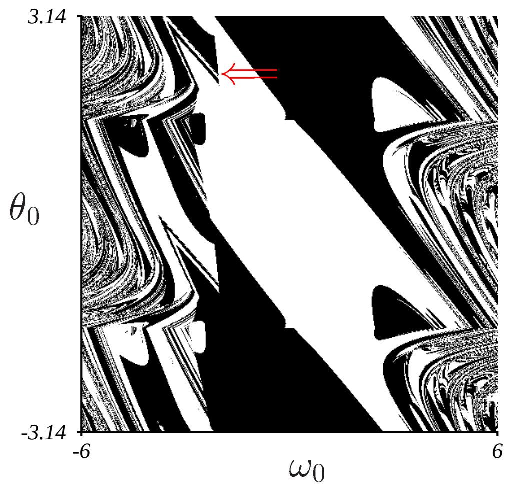

図 3.8: $\omega_0 - \theta_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 2$、$y_0 = 1$、$v_0 = 0$。白：表、黒：裏。

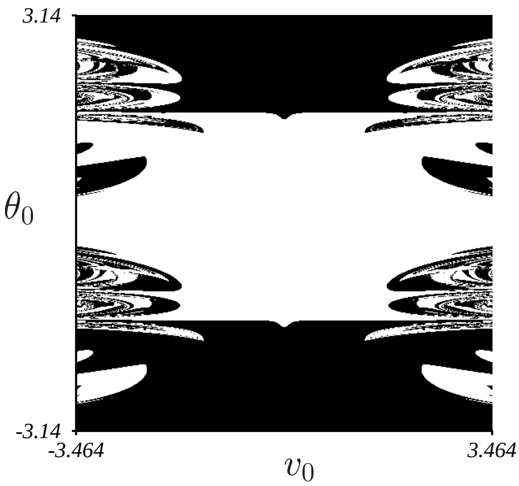

図 3.9: $v_0 - \theta_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 2$、$y_0 = 1$、$v_0 = 0$。白：表、黒：裏。

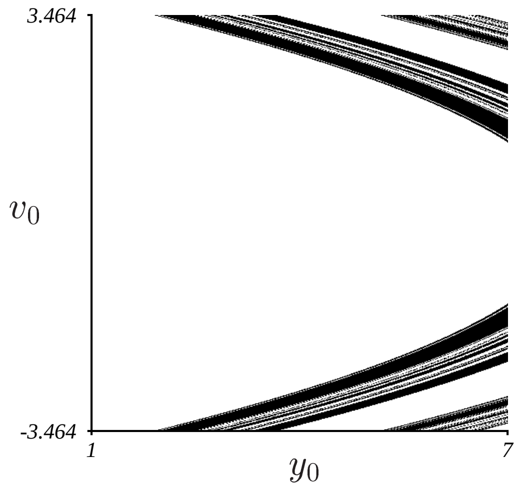

図 3.10: $y_0 - v_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 2$、$\theta_0 = 1.256$、$\omega_0 = 0$。白：表、黒：裏。

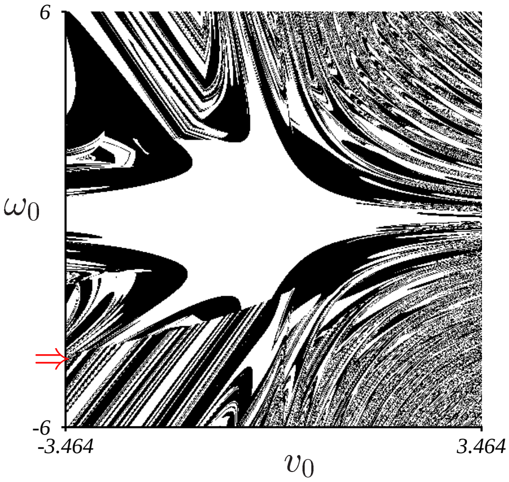

図 3.11: $v_0 - \omega_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 2$、$y_0 = 1$、$\theta_0 = 0$。白：表、黒：裏。

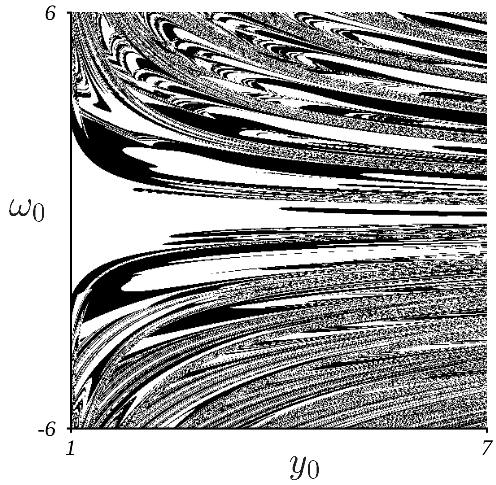

図 3.12: $y_0 - \omega_0$ 断面。$x_0 = 0$、$u_0 = 2$、$v_0 = 0$、$\theta_0 = 0$。白：表、黒：裏。

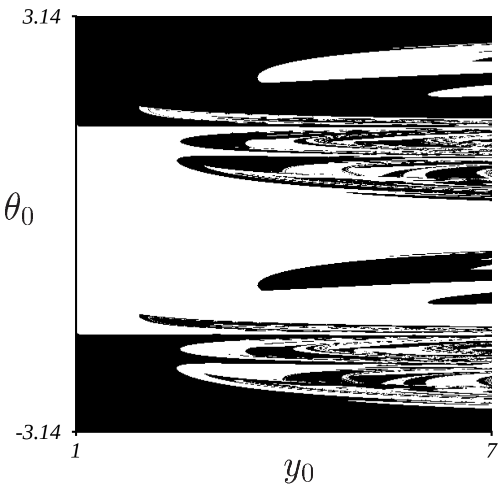

図 3.13: $y-\theta_0$ 断面。$x_0=0$、$u_0=-2$、$v_0=0$、$\omega_0=0$。白：表、青：裏。

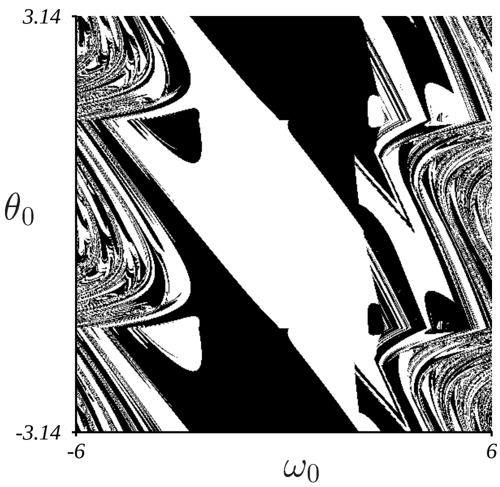

図 3.14: $\omega_0-\theta_0$ 断面。$x_0=0$、$u_0=-2$、$y_0=1$、$v_0=0$。白：表、黒：裏。

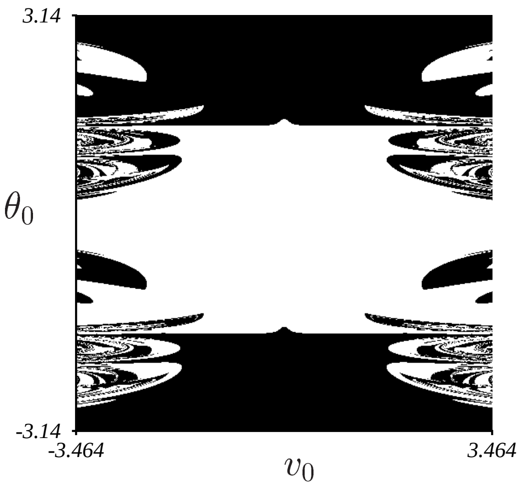

図 3.15: $v_0-\theta_0$ 断面。$x_0=0$、$u_0=-2$、$y_0=1$、$v_0=0$。白：表、黒：裏。

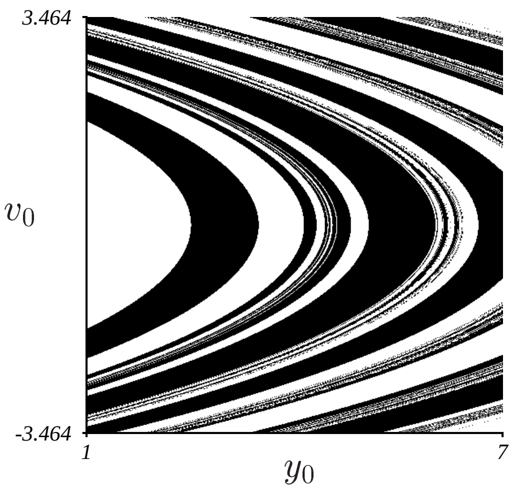

図 3.16: y_0-v_0 断面。$x_0=0$、$u_0=-2$、$\theta_0=1.256$、$\omega_0=0$。白：表、黒：裏。

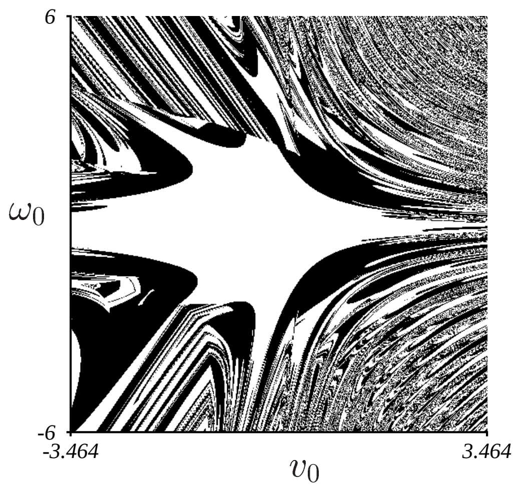

図 3.17: $v_0-\omega_0$ 断面。$x_0=0$、$u_0=-2$、$y_0=1$、$\theta_0=0$。白：表、黒：裏。

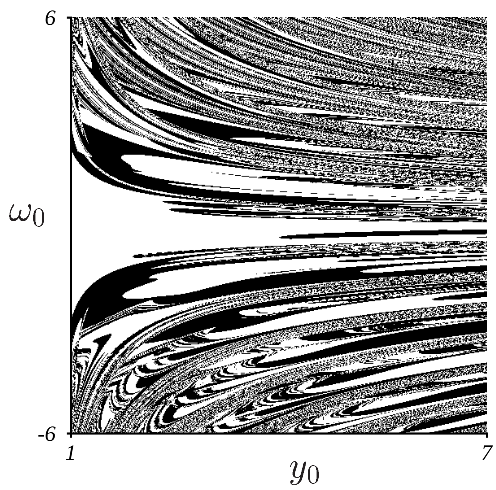

図 3.18: $y_0-\omega_0$ 断面。$x_0=0$、$u_0=-2$、$v_0=0$、$\theta_0=0$。白：表、黒：裏。

り、文献 [14] では、それを数値的に再現している。水平方向に関しては、文献 [16]、[17] で、棒の衝突過程について詳細に調べられており、今後、より現実的なモデルへと拡張する際参考となると思われる。

第4章　三次元サイコロモデル

　ランダムな結果を生み出すものとしてある程度簡単でコインよりも単純で無いものとして三次元のサイコロについて考えようと以下のようなモデルを考えた。シミュレーション、および解析は今後の課題として残る。

◆衝突ルール

・接点から三つの稜を軸とし、サイコロの重心を原点とする座標を考える。

　三つの軸方向の単位ベクトルを、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

　とする。

$$\begin{pmatrix} \omega_\theta \\ \omega_\phi \\ \omega_\psi \end{pmatrix} = \omega_{x'} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \omega_{y'} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \omega_{z'} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_z \end{pmatrix} = T_{x'} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T_{y'} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + T_{z'} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

　となるように $\omega_{x'}$,$\omega_{y'}$,$\omega_{z'}$,$T_{x'}$,$T_{y'}$,$T_{z'}$ を決める。

$$T_{x'} = \frac{x_1(x_2y_3 - x_3y_2)}{M} T_z = \tau_1 T_z \quad , \tag{4.3}$$

$$T_{y'} = \frac{x_1(x_3y_1 - x_1y_3)}{M} T_z = \tau_2 T_z \quad , \tag{4.4}$$

$$T_{x'} = \frac{x_1(x_1y_2 - x_2y_1)}{M} T_z = \tau_3 T_z \quad , \tag{4.5}$$

$$M = (x_1y_3 - x_3y_1)(x_2z_1 - x_1z_2) + (x_3z_1 - x_1z_2)(x_2y_1 - x_1y_2) \quad . \tag{4.6}$$

そうすると、衝突ルールは以下のように記述される。

$$\omega'_{x'} = \omega_{x'} - \frac{1}{2I}(T_{z'} - T_{y'}) \quad , \tag{4.7}$$

$$\omega'_{y'} = \omega_{y'} - \frac{1}{2I}(T_{x'} - T_{z'}) \quad , \tag{4.8}$$

$$\omega'_{z'} = \omega_{z'} - \frac{1}{2I}(T_{y'} - T_{x'}) \quad , \tag{4.9}$$

$$w'_g - \tfrac{1}{2}\{(\omega'_{y'} - \omega'_{z'})z_1 + (\omega'_{z'} - \omega'_{x'})z_2 + (\omega'_{x'} - \omega'_{y'})z_3\} =$$

$$-e[w_g - \frac{1}{2}\{(\omega_{y'} - \omega_{z'})z_1 + (\omega_{z'} - \omega_{x'})z_2 + (\omega_{x'} - \omega_{y'})z_3\}] \quad , \tag{4.10}$$

$$w'_g = w_g + T_z \quad , \tag{4.11}$$

$$T_z = \frac{-(1+e)\{w_g - \frac{1}{2}\{\{(\omega_{y'} - \omega_{z'})z_1 + (\omega_{z'} - \omega_{x'})z_2 + (\omega_{x'} - \omega_{y'})z_3\}\}\}}{1 - [(z_3 - z_2)(\tau_3 - \tau_2) + (z_1 - z_3)(\tau_1 - \tau_3) + (z_2 - z_1)(\tau_2 - \tau_1)/4I]} \quad . \tag{4.12}$$

第5章　まとめと今後の課題

5.1　まとめ

コイン・トスのランダムネスの起源や性質に関して、その内的な要因について調べることを目的とした。二次元空間中において決定論的な力学法則に支配され、床と非弾性衝突を繰り返す棒を用い、表裏の予測不可能性が棒の向きの初期条件依存性で表されると考えた。また、ベイシンの構造を調べることにより、初期値依存性を調べた。

第二章では、滑らかな床という仮定を置いた。同じ初期エネルギー E_0 のもとで初期条件空間の断面を比較すると、断面の切り方によってベイシン構造の細かさは違っていた。しかし、初期条件空間を全体的に見ると、E_0 が大きければ大きいほどベイシンの構造は複雑になり、結果を予測するのが難しくなっていた。短絡的に E_0 が大きくなるにしたがってベイシン構造が細かくなるとはいえないが、E_0 に大きく関係していると予想される。また、物質パラメータを変化させて断面への影響を見た。跳ね返り係数 e を変化させることで、ベイシンの構造は粗くなったり細かくなったりするのが見て取れた。これは、e がエネルギーの散逸と関係しているためで、e を大きくすることは初期エネルギー E_0 を大きくすることと密接な関係を持っていると考えられる。また、初期条件依存性については、各断面の概観により ω_0 に一番大きく依存していると予想したが、ω_0 だけでなく v_0 にも強く依存していた。

ベイシンの構造がフラクタルかどうかというのは興味深い問題であった。なぜなら、フラクタルとなっていれば、初期値選択の精度が有限である限り、コイン・トスの結果はランダムとなるからである。しかし、数値計算の結果を見る限り、ベイシンの構造はフラクタルになっていなかった。このことから、初期条件に対する精度が、その初期条

件空間におけるベイシンの特徴的な大きさよりも十分小さければ、コイン・トスの結果は予測可能になると言えるだろう。すなわち、初期条件空間のベイシンの特徴的なスケールと初期条件に対する精度との大小関係によってコイン・トスが、予測可能か否か決まる。

また、数値計算によって初期条件空間内での「連続性」が成立している例を示した。この「連続性」が存在すれば、ベイシン・バウンダリーの直上では棒が直立する不安定解が存在することになり、バウンダリーの近傍では、その解の近くに長い間滞在していることになる。

エントロピーを調べることにより、初期条件空間内で結果がどの初期値に大きく依存しているかというのを調べた。この結果は、局所的な特徴ではあるが、ω_0 や v_0 に大きく依存するということが分かった。

第三章では文献 [3] のモデルを用いて、摩擦のある床でのコイン・トスにおけるランダムネスについて考えた。その結果、第二章で見たような様々なベイシン構造の対称性がなくなったが、コイン・トスのランダムネスを初期値依存性という観点から見た場合、摩擦なしの場合と大きな変化はなく、コイン・トスにおけるランダムネスを議論する上で摩擦を無視することはそれほど大きな障害にはならないだろうという結論に至った。しかし、このモデルは、衝突過程での水平方向の運動の記述の中に、摩擦を扱う部分で不連続な操作が入っている。このことは、現実のコイン・トスの対応という点で大きな問題となる。また、第二章で考えた初期値空間内での連続性が失われていることが、数値計算によって示された。そのため、より現実的な摩擦の入れ方を考える必要があると思われる。

第四章では、ランダムな結果を生み出すものとして、ある程度簡単な三次元のサイコロの運動に対するモデルをたてた。

5.2 今後の課題

本研究で得られた知見は、コイン・トスのランダムネスの起源及び性質の一端を明らかにした。以下、足りない部分、残された問題、今後の課題を列挙する。

第一に、領域を分ける特徴的な擾乱の大きさ ϵ_{c_1}、ϵ_{c_2} を様々な初期条件の中で調べ、ランダムネスの強さが初期条件空間内でどのように変化するかを調べることで、ランダムネスのメカニズムの理解に近づくと考えられる。特に、ϵ_{c_1}、ϵ_{c_2} のエネルギー依存性はさらに追及するべきだと思われる。

第二に、フラクタル領域の傾きが初期点によって異なるようである。マルチフラクタルではないかと予想される。

第三に、初期値空間内での「連続性」の証明を行うことも課題である。しかし、このモデルの中には不連続な操作は少なくとも {接触条件、終了条件、LR のどっちが接触するか} の３種あり、それぞれに対して「連続性」が成立するかどうかを証明するのは困難である。接触条件や衝突過程の中にある不連続な操作の過程を連続なものへと変更すれば、「連続性」を自明に持つ改良型モデルを作ることは可能であろう。「連続性」を利用すれば、棒が直立し、床と接触した状態から時間を逆に発展させることによりベイシン・バウンダリーを得ることが可能だと考えられる。具体的には、二次元の断面を取るのなら４つの変数のうち２つの変数が、あらかじめ決めておいた値となったときの残り２つの値をプロットする方法が考えられる。そこで、あらかじめ値を決める変数を選ぶ際、ω は、一定の値しかとらないため、こちらが決めた値となるのはなかなか難しい。よって、残る三つの値から、２つの値を選ぶのが適当と思われる。

第四に、chattering collision は、ベイシンバウンダリーでの挙動と深くかかわっていると考えられる。したがって、chattering collision が起きる条件を明らかにすることも残された課題である。

第三章で見た摩擦のある床でのモデルは、衝突過程の摩擦を扱う中で不連続な操作が入っており、現実のコイン・トスを忠実に再現しているとは言い難い。そこで、コイン・トスをより現実に近いモデルへの拡張として、床からの水平方向の力のよりよい取り入れ方の考察をする必要がある。球の跳ね返りに関する文献 [14],[15]、棒の跳ね返りに関する文献 [16],[17] を参考にモデルを見直すことも必要である。

付 録A　無次元化

式(2.4),(2.5),(2.6),(2.13),(2.14),(2.15),(2.16),(2.22)を無次元化する。無次元量を$'$付きで表すと、$x' = B_1x$、$y' = B_2y$、$u' = B_3u$、$v' = B_4v$、$\omega' = B_5\omega$、$T'_x = B_6T'_x$、$T'_y = B_7T_y$、$t' = B_8t$、$\tilde{I} = B_9I$、$E' = B_{10}E$とすると、(2.4)より、

$$x' = \frac{B_1}{B_3B_8}u'_0t' + x'_0 \tag{A.1}$$

$$\frac{B_1}{B_3B_8} = 1 \tag{A.2}$$

(2.5)より、

$$y' = y'_0 + \frac{B_2}{B_4B_8}v'_0t' - \frac{1}{2}\frac{gB_2}{B_8^2}t' \tag{A.3}$$

$$\frac{B_2}{B_4B_8} = 1, \frac{B_8^2}{B_2} = g \tag{A.4}$$

(2.6)より、

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{B_5B_8}\omega't \tag{A.5}$$

$$B_5B_8 = 1 \tag{A.6}$$

(2.13)より、

$$\frac{m}{B_3}(u'_2 - u'_1) = \frac{T'_x}{B_6} \tag{A.7}$$

$$\frac{B_3}{B_6} = m \tag{A.8}$$

(2.14)より、

$$\frac{m}{B_4}(v'_2 - v'_1) = \frac{T'_y}{B_7} \tag{A.9}$$

$$\frac{B_4}{B_7} = m \tag{A.10}$$

(2.15) より、

$$\tilde{I}(\omega_2' - \omega_1') = A\frac{rB_5B_9}{B_6}T_x' \sin\theta - A\frac{rB_5B_9}{B_7}T_y' \cos\theta \tag{A.11}$$

$$\frac{B_6}{B_5B_9} = r, \frac{B_7}{B_5B_9} = r \tag{A.12}$$

(2.16) より、

$$-(v_2' - A\frac{rB_4}{B_5}\omega' \cos\theta_2) = e(v_1' - A\frac{rB_4}{B_5}\omega'\theta_1) \tag{A.13}$$

$$\frac{B_3}{B_2} = r \tag{A.14}$$

(2.22) より、

$$\frac{E'}{B_{10}} = mg\frac{y'}{B_2} + \frac{1}{2}m\left(\frac{u'}{B_3}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v'}{B_4}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\tilde{I}}{B_9}\left(\frac{\omega'}{B_5}\right)^2 \tag{A.15}$$

$$\frac{B_2}{B_{10}} = mg \tag{A.16}$$

(A.2),(A.4),(A.6),(A.8),(A.10),(A.12),(A.14),(A.16) から、

$$B_1 = \frac{1}{r} \tag{A.17}$$

$$B_2 = \frac{1}{r} \tag{A.18}$$

$$B_3 = \frac{1}{\sqrt{rg}} \tag{A.19}$$

$$B_4 = \frac{1}{\sqrt{rg}} \tag{A.20}$$

$$B_5 = \sqrt{\frac{r}{g}} \tag{A.21}$$

$$B_6 = \frac{1}{m\sqrt{rg}} \tag{A.22}$$

$$B_7 = \frac{1}{m\sqrt{rg}} \tag{A.23}$$

$$B_8 = \sqrt{\frac{g}{r}} \tag{A.24}$$

$$B_9 = \frac{1}{mr^2} \tag{A.25}$$

$$B_{10} = \frac{1}{mgr} \tag{A.26}$$

を得る。

謝辞

本論文作成において直接のご指導と数々の意義のあるご指摘をいただきました水口毅先生に深く感謝の意を表します。また、多大なるご意見をいただきました、大同寛明教授、福田浩昭先生に深く感謝致します。最後に、研究の間お世話になりました研究室の皆様に感謝の意を示し、本論文の結びと致します。

参考文献

[1] J.Ford, *"How random is a coin toss?"*, Phys. Today. **36** (1983) pp.40-47.

[2] S.Wolfram, *"Origins of Randomness in Physical Systems"*, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) pp.449-452.

[3] V.Z.Vulovic and R.E.Prange, *"Randomness of a true coin toss"*, Phys. Rev. **A33** (1986) pp.576-582.

[4] R.Feldberg, M.Szymkat, C.Knudsen, and E.Mosekilde, *"Iterated-map approach to die tossing"*, Phys. Rev. **A42** (1990) pp.4493-4502.

[5] D.B.Murray and S.W.Teare, *"Probability of a tossed coin landing on edge"*, Phys. Rev. **E48** (1993) pp.2547-2552.

[6] Zhang Kechen, *"Uniform distribution of initial states: The physical basis of probability"*, Phys. Rev. **A41** (1990) pp.1893-1900.

[7] Yue Zeng-yuan and Zhang Bin, *"ON THE SENSITIVE DYNAMICAL SYSTEM AND THE TRANSITION FROM THE APPARENTLY DETERMINISTIC PROCESS TO THE COMPLETELY RANDOM PROCESS"*, Appl. Math. Mech. **6** (1985) pp.193-211.

[8] C.Grebogi, E.Ott, and J.A.Yorke, *"Fractal Basin Boundaries, Long-Lived Chaotic Transients, and Unstable-Unstable Pair Bifurcation"*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) pp.935-938.

[9] S.Bleher, C.Grebogi, E.Ott, and R.Brown, *"Fractal boundaries for exit in Hamiltonian dynamics"*, Phys. Rev. **38** (1988) pp.930-938.

[10] C.Grebogi, E.Kostelich, E.Ott, and J.A.Yorke, *"MULTI-DIMENSIONED INTERTWINED BASIN BOUNDARIES AND THE KICKED DOUBLE ROTOR"*, Phys. Lett. **118A** (1986) pp.448-452.

[11] C.Grebogi, S.McDonald, E.Ott, and J.A.Yorke, *"FINAL STATE SENSITIVITY:AN OBSTRUCTION TO PREDICTABILITY"*, Phys. Lett. **99A** (1983) pp.415-418.

[12] 高安秀樹, "フラクタル科学", 朝倉書店.

[13] 高安秀樹, "フラクタル", 朝倉書店.

[14] H.Kuninaka and H.Hayakawa, *"The anomalous behavior of coefficient of normal restitution in the oblique impact"*, cond-mat/0310058.

[15] M.Y.Louge and M.E.Adams, *"Anomalous behavior of normal kinematic restitution in the oblique impacts of a hard sphere on an elastoplastic plate"*, Phys. Rev. **E65** (2002)021303.

[16] C.E.Smith and P.-P.Liu, *"Coefficients of Restitution"*, J. Appl. Mech. **59** (1992) pp.963-969.

[17] Y.Hurmuzlu, *"An Energy-Based Coefficient of Restitution for Planar Impacts of Slender Bars With Massive External Surface"*, ASME J. Appl. Mech. **65** (1998) pp.952-962.