

物理学 I-1 (75 点)

図1に示すように、 3ℓ 離れた2つの壁の間に質量 m の2つの質点1, 2がバネ定数 k_1, k_2 のバネで壁とつながれ振動している。質点は重力の影響を受けず、その振動はバネが伸縮する1次元方向に限られている。2つの質点の平衡位置からの変位を、それぞれ q_1, q_2 とする。バネの自然長は ℓ であり、その質量は無視できるものとして、以下の問いに答えよ。また、時間 t の関数 A に対して $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$, $\ddot{A} = \frac{d^2A}{dt^2}$ とし、その表記を用いても良い。

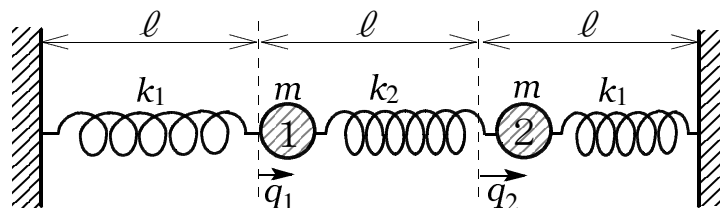


図1

- (1) 質点1, 2が満たす運動方程式を書け。
- (2) $Q_1 = q_1 - q_2$, $Q_2 = q_1 + q_2$ は、この系の基準座標である。 Q_1, Q_2 が満たす運動方程式を求めよ。
- (3) (2)で求めた運動方程式から、 Q_1, Q_2 に対するそれぞれの基準角振動数 ω_1, ω_2 を求めよ。
- (4) この系の全エネルギーを $Q_1, Q_2, \dot{Q}_1, \dot{Q}_2$ を用いて書け。

天井からつり下がる長さ a で伸び縮みしない棒の先端に質量 M のおもりを付けた自由振り子3, 4を、図2に示すように、バネ定数 k のバネでつないで振動させる。振り子の振れは、バネと振り子を含む鉛直面内のみで起こるとする。2つの振り子の振れ角を、鉛直下方からそれぞれ θ_3, θ_4 とし、 $\theta_3 = \theta_4 = 0$ のときの2つのおもりの距離がバネの自然長 ℓ に等しいとする。棒とバネの質量やおもりの大きさは無視できるものとし、重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。なお、バネの伸縮による力は水平方向のみを考えればよい。

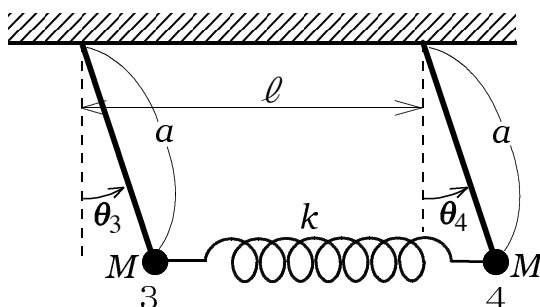


図2

- (5) 2つの振り子からなるこの系の運動エネルギー T を求めよ.
- (6) バネの伸縮による弾性エネルギー K を求めよ.
- (7) 天井の位置を基準として, この系の全ポテンシャルエネルギー U を求めよ.
- (8) この系のラグランジュ関数 L を書け.
- (9) この系のラグランジュ関数 L とオイラー・ラグランジュの方程式から, 振り子 3, 4 に関する運動方程式を求めよ.
- (10) 振り子の振れ角 θ_3, θ_4 が十分小さいとき, (9) で求めた運動方程式は, どのように近似されるか示せ. 十分小さい θ に対しては, $\cos \theta \cong 1, \sin \theta \cong \theta$ の近似が成り立つことを用いてよい.
- (11) (10) で求めた運動方程式に対して基準角振動数を求めるために,
$$\theta_3 = C \cos(\omega t + \alpha), \quad \theta_4 = D \cos(\omega t + \alpha)$$
とおく. 振幅 C, D を求める連立方程式を書け. ここで, ω と α は定数とする.
- (12) (11) で求めた連立方程式が, $C = D = 0$ 以外の解を持つための条件式を求めよ.
- (13) (12) で求めた条件式を解くことで, 2つの基準角振動数 ω_3, ω_4 を求めよ. また, 求めた基準角振動数 ω_3, ω_4 に対する振動の様子について述べよ.

物理学 I-2 (75 点)

真空中の電磁場に関する以下の問いに答えよ。ただし、誘電率および透磁率には ϵ_0 と μ_0 をそれぞれ用いること。

- (1) 真空中の電磁場を記述するマクスウェル方程式を 4 つ書け。
- (2) (1) の式を用いて、電場 E に関する波動方程式を導け。

定常電流が真空中につくる磁場について、以下の問いに答えよ。

- (3) 図 1 に示すように、 x 軸上を無限に長い直線電流 I が流れている場合を考える。原点 O から x 軸に垂直に距離 R だけ離れた点を P とし、 x 軸上の点 Q から点 P までの距離を r とする。このとき、点 Q における電流素片 $I dx$ が点 P につくる磁束密度の大きさ dB の式を、ビオ・サバールの法則から書き表せ。
- (4) (3) で得た結果について、 dx から $d\theta$ に変数変換し、 θ_1 から θ_2 まで積分することで、 x 軸上の AB の部分の電流が点 P につくる磁束密度の大きさが以下の式で表されることを示せ。

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad \text{①}$$

- (5) 一辺の長さが a の正三角形の導線回路を定常電流 I が流れる場合に、正三角形の中心につくられる磁束密度の大きさを求めよ。
- (6) 図 2 (a) のような、半径 b の円形回路を定常電流 I が流れている。このとき、円形回路の中心 O から中心軸に沿って距離 d だけ離れた点 P につくられる磁束密度の大きさを求め、その方向を述べよ。
- (7) 図 2 (b) のような、単位長さあたりの巻き数 n 、半径 b 、長さ L の単層ソレノイドに定常電流 I が流れている。 θ_3 および θ_4 を図のように定義するとき ($0 < \theta_3 < \theta_4 < \pi$)、ソレノイドの中心軸上の点 P における磁束密度の大きさが以下の式で表されることを示せ。

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_3 - \cos \theta_4) \quad \text{②}$$

- (8) 図 3 のような、内半径 R_1 、外半径 R_2 、全長 L 、全巻き数 N 回の多層ソレノイドコイルに定常電流 I が流れている。半径 r 、厚み dr のコイルの微小部分がソレノイドの中心 O につくる磁束密度の大きさ dB が以下の式で表されることを示せ。ただし、コイルには導線が均一に巻かれており、導線の太さは十分に細いとする。

$$dB = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1) \sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} dr \quad \text{③}$$

また、これを R_1 から R_2 まで積分することで、ソレノイド全体が中心 O につくる磁束密度の大きさを求めよ。

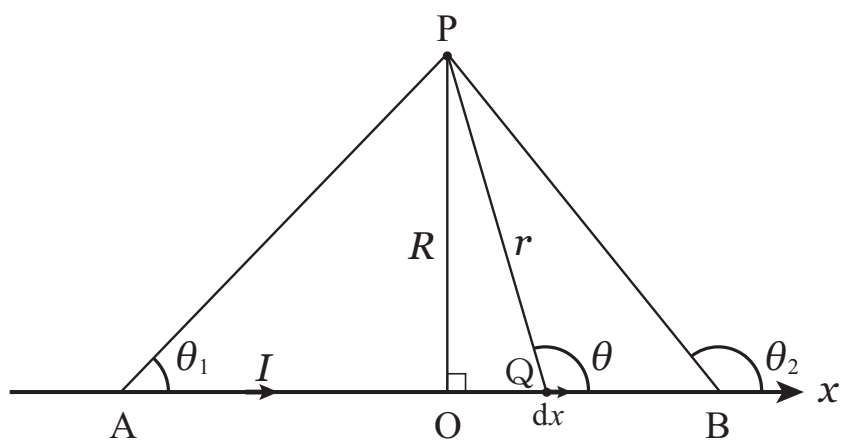


图 1

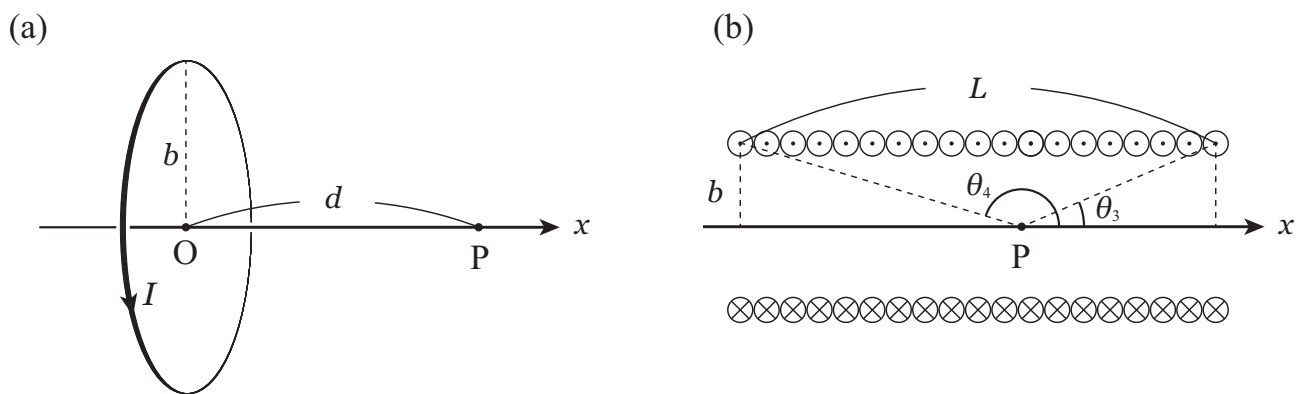


图 2

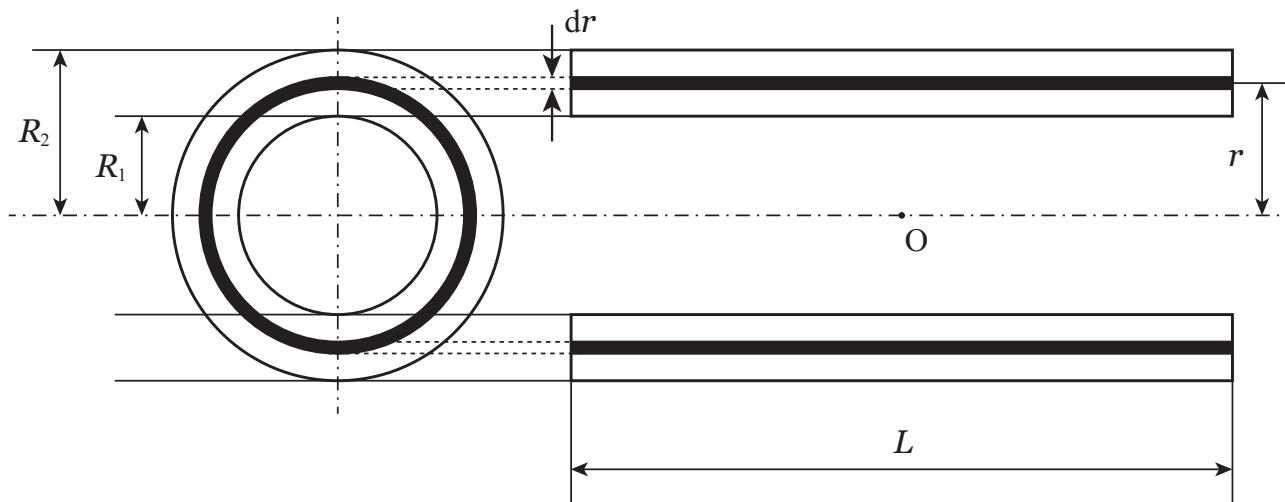


图 3

物理学 II-1 (75 点)

1次元における無限に深い井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq L) \\ +\infty & (x < 0, x > L) \end{cases} \quad (1)$$

中を運動する質量 m の粒子を考える。ここで、 L は正の定数である。以下の問いに答えよ。

- (1) エネルギー固有値 $E_n^{(0)}$ と規格化された固有関数 $\psi_n^{(0)}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

この系に摂動として次の δ 関数型ポテンシャルを加える。

$$\Delta V(x) = \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2mL} \delta\left(x - \frac{L}{2}\right). \quad (2)$$

ここで、 ε は正の微小定数である。

- (2) 摂動によるエネルギーのずれ $E_n^{(1)}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を ε の 1 次までの近似で求めよ。
(3) (2) の結果について、 n の偶奇に注意して、その特徴を述べよ。

以下では、 $V(x) + \Delta V(x)$ をポテンシャルとするシュレーディンガー方程式を解くことを考える。

- (4) $x = \frac{L}{2}$ における波動関数 $\psi(x)$ とその 1 階微分 $\frac{d}{dx}\psi(x)$ が満たすべき条件式を示せ。
(5) エネルギー固有関数 $\psi_n(x)$ について、 $x = \frac{L}{2}$ を中心として対称、または反対称と仮定してよい。その理由を述べよ。
(6) (5) より、エネルギー固有関数 $\psi_n(x)$ は、 $x = \frac{L}{2}$ を中心として対称 ($\psi_n^S(x)$)、または反対称 ($\psi_n^A(x)$) と仮定してよいので、半分の領域 $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ で考えれば十分である。このとき、(4) の条件式が以下のようなことを説明せよ。

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \psi_n^S(x) \Big|_{x=\frac{L}{2}-a} = -\frac{\varepsilon}{2L} \psi_n^S\left(\frac{L}{2}\right), \quad \psi_n^A\left(\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (3)$$

ここで、 a は正の定数である。

- (7) $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ において、エネルギー固有関数 $\psi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$\psi_n(x) = N_n \sin(k_n x) \quad (4)$$

と仮定できる。ここで、 N_n は規格化定数である。条件式 (3) にこの波動関数を代入して、波数 k_n に対する条件式を導け。

- (8) δ_n を正の微小定数として、波数を $k_n = \frac{n\pi}{L}(1 + \delta_n)$ とおく。(7) で求めた条件式を δ_n の 1 次までの近似で解くことにより、エネルギー固有値が (1)、(2) の結果と一致することを示せ。

物理学 II-2 (75 点)

絶対温度 T の熱浴と接して熱平衡にある粒子数 N の系について考える. この系において, 1つの粒子が取りうる微視的状态は K 個あり, それぞれが E_n ($n = 1, 2, \dots, K$) で表されるエネルギーを持つとする. ただし, 粒子の増減と粒子間の相互作用は無視できるとする. また, この系の体積は変化しないものとする. ボルツマン定数を k , また, $\beta = \frac{1}{kT}$ として以下の問いに答えよ.

- (1) 1つの粒子が m 番目の状態をとる確率 p_m を, 分配関数 $Z(\beta) = \sum_{n=1}^K e^{-\beta E_n}$ を用いて表せ.
- (2) この系におけるエネルギーの熱力学的平均値 \mathcal{E} を求めよ.
- (3) 古典的な熱力学において, 内部エネルギー U とヘルムホルツの自由エネルギー F の間には, $U = \frac{\partial}{\partial \beta} \{\beta F(\beta)\}$ なる関係式 (ギブス=ヘルムホルツの関係式) が成り立つことが知られている. この関係式と, エネルギーの原点は任意であることを用いて $F = -NkT \log Z(T)$ を導け.

スピン $\frac{1}{2}$ の粒子が磁場 H の中に置かれると, ゼーマン効果としてそのエネルギー準位は磁場の大きさに比例したエネルギー幅をもって分裂する. それぞれの準位に属する粒子のスピンは磁場の向きを正として $\mp\mu$ の磁気モーメントを持つとする. 粒子は N 個あり, 各磁気モーメント間の相互作用は無視できるとする. また, 系のエネルギーの基準は, $H = 0$ における値とする. この系が絶対温度 T の熱浴に接して熱平衡状態にあり, カノニカル分布によって取り扱えるとして以下の問いに答えよ.

- (4) この系の分配関数 Z_N を求めよ.
- (5) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F を求めよ.
- (6) この系のエントロピー S を求めよ. また, 高温 $\left(\frac{\mu H}{kT} \ll 1\right)$ においてエントロピーがどのような値をとるか, 議論せよ. ただし, $\log(\cosh x) = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ である.
- (7) この系の断熱を保ったまま H を $\frac{H}{a}$ に変化させたとき, 温度 T はどのように変化するか述べよ. ただし, a は正の定数である.
- (8) この系の磁場 H における比熱 C を求めよ.
- (9) この系の磁場 H における磁化 M を求めよ. また, 高温 $\left(\frac{\mu H}{kT} \ll 1\right)$ において磁化 M がどのような値をとるか, 議論せよ.

問題 (50点)

(1) 次の英文中の空欄に入るもっとも適した語をそれぞれの選択肢から選べ。

i) The about an axis is defined as the sum of the product of the particle mass and the square of the perpendicular distance from the axis.

選択肢 : angular moment, centrifugal force, kinetic energy, moment of inertia, momentum

ii) The eigenfunctions corresponding to two different eigenvalues E and E' are , meaning that the integral of the product of one of them and the complex conjugate of the other is zero.

選択肢 : complete, degenerate, normalized, orthogonal, regular

iii) The concerns itself with the problem of one or more point charges in the presence of boundary surfaces.

選択肢 : finite element method, Gauss's law, Green function, Maxwell equation, method of images

iv) A thermodynamic process of a system is said to be if the system is thermally insulated so that no heat can be exchanged between it and its environment during the process.

選択肢 : adiabatic, conservative, homogeneous, isothermal, qualitative

v) When the Schrödinger equation needs to be solved using an approximation method, is applied to cases in which the real system can be described as a small change from an easily solvable, idealized system.

選択肢 : Fermi's Golden rule, the perturbation method, the rotating wave approximation, the variational method, the WKB method

(2) 以下の文章を読み、空欄に入るもっとも適した語を選択肢から一つずつ選べ。ただし同じ語を二度以上用いてはならない。

Classical dynamics has been the prototype of the scientific approach. In French the term “rational” mechanics is often used, implying that the laws of classical mechanics are the very laws of reason. Among the characteristics attributed to classical dynamics was that of strict i . In dynamics a fundamental distinction is made between initial conditions, which may be given arbitrarily, and the equations of motion, from which the system's later dynamic state can be calculated. Modern dynamics was born with Johannes Kepler's laws of planetary motion and with Newton's solution of the “two body” problem. However, dynamics becomes enormously more ii as soon as we take into

account a third body. If the system is sufficiently complex, knowledge of the system's initial state generally does not allow us to predict the behavior of this system over long periods of time. This persists even when precision in the determination of the initial state becomes arbitrarily high. It becomes impossible, even in principle, to know whether, for instance, the solar system that we inhabit is stable for all future times. Such considerations considerably limit the usefulness of the concept of trajectories. We must, then, consider ensembles of trajectories compatible with our measurements. But once we leave the consideration of single trajectories, we leave the model of strict determinism. We can make only predictions, forecasting average results.

選択肢: complicated, determinism, ensemble, statistical, straightforward, uncertainty

- (3) 以下の文章を読み、空欄に入るもっとも適した語を選択肢から一つずつ選べ。ただし同じ語を二度以上用いてはならない。

About 100,000 years ago, humans learned how to speak, and about 5,000 years ago they learned to write. The complexity and diversity of human language sets *Homo sapiens* apart from all other species. Of course there are other attributes that are uniquely human: no other species wears clothes, creates art, or spends two hours a day on social media in the way that humans do. But when Alan Turing proposed his test for intelligence, he based it on language, not art or haberdashery, perhaps because of its universal scope and because language captures so much of intelligent behavior: a speaker (or writer) the goal of communicating some knowledge, then some language that the knowledge, and to achieve the goal. The listener (or reader) the language, and the intended meaning. This type of communication via language has allowed civilization to grow; it is our main means of passing along cultural, legal, scientific, and technological knowledge.

- haberdashery: 小間物類, 紳士用雑貨類

選択肢: acts, has, infers, perceives, plans, represents

- (4) 次の英文を和訳せよ。

- i) At the very beginning of the development of quantum mechanics, one was faced with the problem of finding a differential equation describing discrete states of an atom. It was not possible to deduce exactly such an equation from old and well-known physical principles; Instead, one had to search for parallels in classical mechanics and try to deduce the desired equation on the basis of plausible argument. Such an

equation, not derived but guessed intuitively, would then be a postulate of the new theory, and its validity would have to be checked by experiment.

- parallel: 類似点

ii) It may seem perverse to use a computer, that most precise and deterministic of all machines conceived by the human mind, to produce “random” numbers. More than perverse, it may seem to be a conceptual impossibility. Any program, after all, will produce output that is entirely predictable, hence not truly “random.”

- perverse: ひねくれた, 邪道な

iii) The laws of nature and the results of all experiments performed in a given frame of reference are independent of the translational motion of the system as a whole. More precisely, there exists an infinite set of equivalent Euclidean reference frames moving with constant velocities in rectilinear paths relative to one another in which all physical phenomena occur in an identical manner.

- Euclidean reference frame: ユークリッド座標系
- rectilinear: 直線の

(5) 次の日本語を英訳せよ。必要ならば下の [] 中にある英語を用いてよい。

- 複雑な形をしたポテンシャルであっても、多くのものは平衡点の近傍では調和振動子で近似できる。
- 逆 2 乗則は、長さの尺度では少なくとも 2.5 桁の範囲でなりたつことがわかっている。
- Maxwell 方程式は、電場と磁場の各成分の間関係を与える連立 1 階偏微分方程式である。

[coupled partial differential equations, equilibrium, inverse square law]

出典 : I. Prigogine, “*From being to becoming*” (Freeman and Company 1980), S. J. Russel, *et al.*, “*Artificial intelligence: a modern approach*” (Pearson 2021), W. Greiner, “*Quantum mechanics: an introduction*” (Springer-Verlag 1989), W. H. Press, *et al.*, “*Numerical recipes in C*” (Cambridge 1988), J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*” (Wiley 1999).