

## 物理学 I-1 (75 点)

円筒座標系は図 1 に示すように  $(r, \varphi, z)$  を用いて表す直交座標系である。座標系の基底ベクトルは、それぞれ  $\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}$  である。 $\hat{q}$  記号は  $q$  方向の単位ベクトルを、 $\dot{q}$  は  $q$  の 1 階の時間微分を、 $\ddot{q}$  は  $q$  の 2 階の時間微分を、それぞれ表す。この問題では右手系を用いる。すなわち、円筒座標系では位置ベクトル  $\vec{s}$  は、

$$\vec{s} = r\hat{r} + z\hat{z}$$

と表せる。

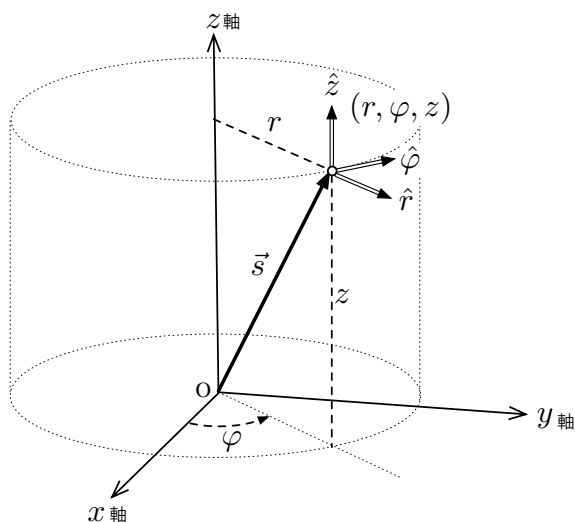


図 1: 円筒座標系

(1) 円筒座標系において速度  $\vec{v}$  が次式となることを示せ。

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \dot{z}\hat{z} \quad \text{①}$$

(2) 円筒座標系において加速度  $\vec{a}$  が次式となることを示せ。

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z} \quad \text{②}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \right] \hat{\varphi} + \ddot{z}\hat{z} \quad \text{③}$$

次に、図 2 に示すような、滑らかな放物面の内側を運動する質量  $m$  の質点を考える。摩擦や空気抵抗は考えなくてよい。放物面の対称軸は  $z$  軸と一致し、頂点を原点とする円筒座標を考える。一様な重力加速度  $g$  が  $-\hat{z}$  方向に働いている。放物面の方程式は、

$$z = ar^2 \quad \text{④}$$

とする。ここで  $a$  は、長さの逆数の次元を持つ正の定数である。

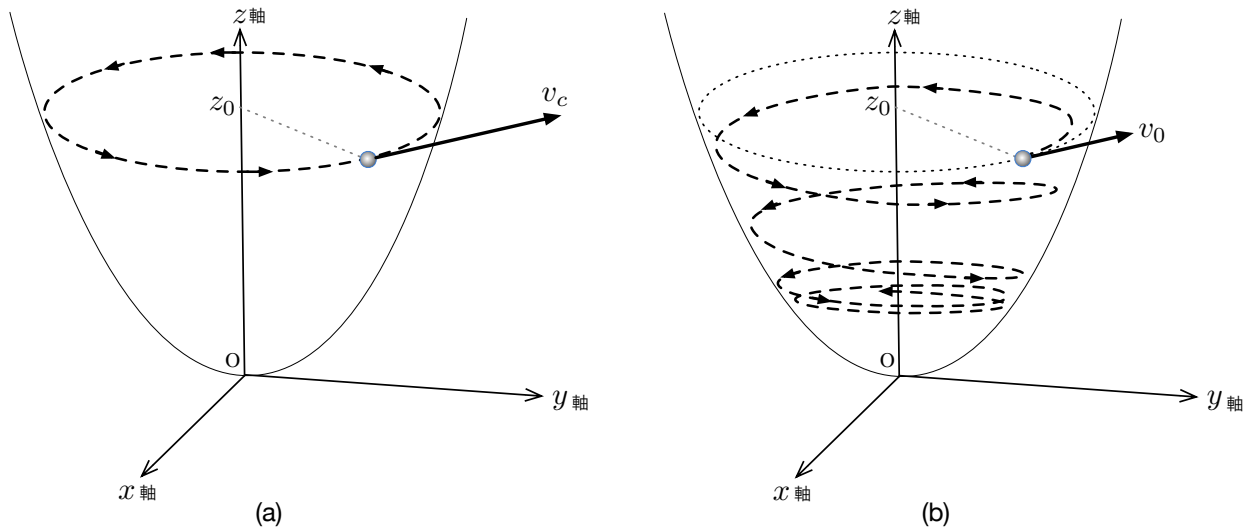


図 2: 滑らかな放物面の内側を運動する質点

高さ  $z_0$  の位置で、放物面に沿って水平方向の初速度を質点に与えて射出する。

- (3) 初速度の大きさがある値  $v_c$  のとき、図 2(a) のように質点は高さ  $z_0$  を保持して  $z$  軸を中心に円運動をする。  $v_c$  を求めよ。

初速度の大きさを  $v_0$  ( $0 < v_0 < v_c$ ) にすると、質点は図 2(b) のように放物面上を運動した。その最高点は  $z_0$  であり、最下点が存在する。この運動について以下の問いに答えよ。

- (4) 質点の  $z$  軸周りの角運動量  $h$  は保存する。その理由を簡潔に述べよ。そして  $h$  を求めよ。  
 (5) 質点が高さ  $z$  にあるときの運動エネルギーを角運動量  $h$  と円筒座標を用いて表せ。また、質点の力学的エネルギー  $E$  を求めよ。  
 (6) 最下点の高さを求めよ。最下点では  $\dot{z} = 0$  である。

次に、この質点の運動をラグランジアン  $L$  を用いて調べる。

- (7) 質点のラグランジアン  $L$  と拘束条件（束縛条件）を記せ。  
 (8)  $\lambda$  を未定乗数として、前問の拘束条件のあるラグランジュ方程式を記せ。  
 (9)  $\dot{r}^2$  と  $\lambda$  を、  $E, h$  を用いて求めよ。  
 (10) 前問の答えから、最下点の高さを求めよ。

## 物理学 I-2 (75 点)

真空の透磁率を  $\mu_0$  として以下の問いに答えよ.

- (1) 図1のように, 無限に長い直線導線に定常電流  $I$  が流れている. 導線の中心からの距離を  $r$  として, 磁束密度の大きさを求めよ.
- (2) 図2のように, 中心軸が  $z$  軸に平行な有限の長さの直線導線に定常電流  $I$  が流れている. この電流がつくる磁場は, 電流素片がつくる磁場を積分することで求めることができる. 中心から  $r$  の距離の点  $P$  における磁束密度の大きさ  $B$  が, 以下の式で表されることを, ビオ・サバルの法則を用いて示せ.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad \text{①}$$

- (3) 図2の点  $P$  におけるベクトルポテンシャルの向きは導線と平行であり,  $z$  方向成分  $A_z$  は次式で表される. 導線上の電流素片からの寄与を積分することで, この関係式が成り立つことを示せ.

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{\sqrt{r^2 + l_1^2} + l_1}{\sqrt{r^2 + l_2^2} - l_2} \quad \text{②}$$

- (4) 図2の点  $P$  において, ②式のベクトルポテンシャルを用いて, 問(2)と等しい磁束密度が導かれることを示せ.
- (5) 図3のように, 間隔  $d$  の無限に長い平行導線に定常電流  $I$  が逆向きに流れている. それぞれの導線からの距離が  $r_1, r_2$  である点  $Q$  を考える. 点  $Q$  におけるベクトルポテンシャルの大きさは, ②式を2本の導線に適用し,  $l_1, l_2$  を無限大にすることで導くことができる. このベクトルポテンシャルを用いて, 磁束密度の大きさが以下の式で表されることを示せ.

$$B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi r_1 r_2} \quad \text{③}$$

- (6) 導線間では, それぞれの電流がつくる磁場が他方の電流に力を及ぼす. 図3の平行導線間に作用する単位長さあたりの力の大きさを求めよ.
- (7) 図4のように, 定常電流  $I_1$  が流れている無限に長い直線導線と, 定常電流  $I_2$  が流れている半径  $a$  の円形コイルが同一平面内にある. 円の中心から直線導線までの距離は  $d (>a)$  とする. 円形コイル内の微小面積を積分することで, 円形コイルを貫く, 電流  $I_1$  がつくる全磁束を求めよ.
- (8) 図4において, 直線導線と円形コイルの間に働く力の大きさを求めよ.

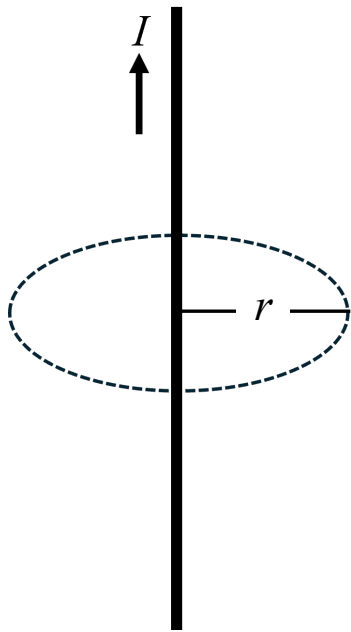


图1

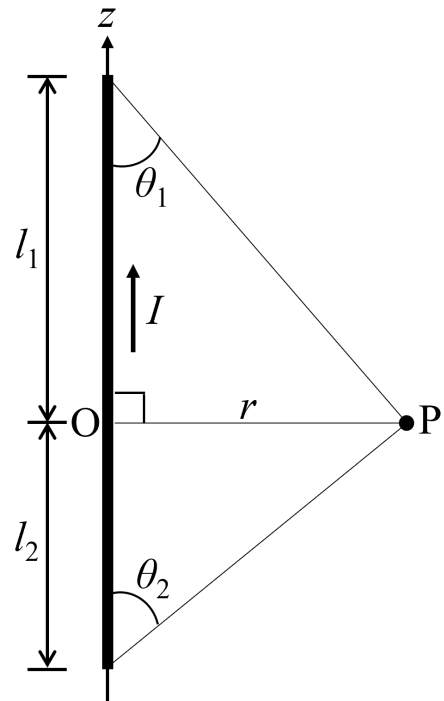


图2

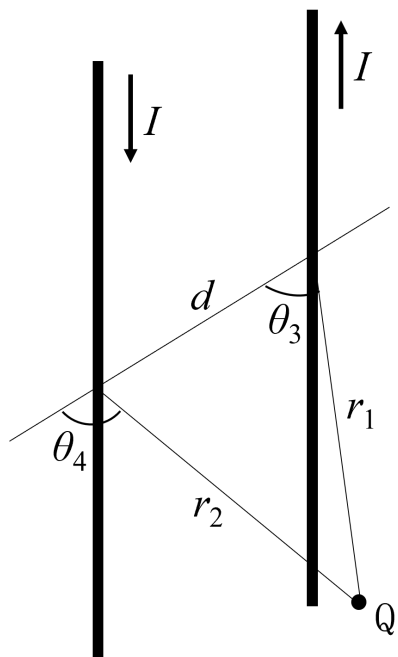


图3

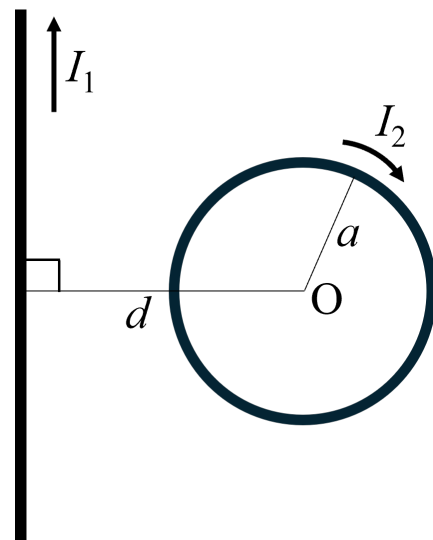


图4

## 物理学 II-1 (75 点)

$x$  軸上をポテンシャル  $V(x)$  のもとで運動する質量  $m$  ( $m > 0$ ) の粒子の定常状態を,  $V(x)$  が無限井戸型ポテンシャルの場合と調和振動子ポテンシャルの場合について考える. プランク定数を  $2\pi$  で割ったものを  $\hbar$  として, 以下の問いに答えよ.

まず,  $V(x)$  が以下のような無限井戸型ポテンシャルの場合を考える.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < L) \\ \infty & (|x| \geq L) \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

ただし  $L > 0$  とする.

(1)  $|x| < L$  におけるシュレーディンガー方程式を解き, 定常状態のエネルギー固有値と波動関数を全て求めよ. ただし, 波動関数の規格化因子は未定のままでよい.

(2) 第  $n$  励起状態のエネルギー固有値  $E_n$  が

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 (n+1)^2}{8mL^2} \quad \textcircled{2}$$

と表されることを示せ. また, 第  $n$  励起状態の波動関数が奇関数か偶関数か答えよ. ただし, 必要なら場合分けを行うこと.

(3) 第  $n$  励起状態について,  $-L < x < L$  の区間にある, 粒子の存在確率が 0 となる点の個数を求めよ.

以下のすべての問いでは,  $V(x)$  が調和振動子ポテンシャル

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad \textcircled{3}$$

である場合について考える. ただし  $\omega > 0$  とする. 運動量演算子  $\hat{P}$  と座標演算子  $\hat{X}$  をもちいると, ハミルトニアン  $\hat{H}$  は

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{X}^2 \quad \textcircled{4}$$

と書かれる. 消滅演算子を  $\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{X} + \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right)$  と定義する.

(4) ハミルトニアンが  $\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)$  と表されることを示せ.

(5)  $\hat{a}|0\rangle = 0$  を満たす基底状態  $|0\rangle$  をもちいて, 第  $n$  励起状態は  $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$  と書かれる. 第  $n$  励起状態のエネルギー固有値  $E_n$  を求めよ.

$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$  を満たす状態  $|x\rangle$  をもちいて、任意の状態  $|\psi\rangle$  の波動関数  $\psi(x)$  は  $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$  と表される。

(6)  $\hat{a}|0\rangle = 0$  に注意して、基底状態の波動関数  $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$  を求めよ。ただし、規格化因子は未定のままでよい。また、任意の状態  $|\psi\rangle$  について  $\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|\psi\rangle$  が成り立つことをもちいてよい。

(7) 第  $n$  励起状態の波動関数  $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$  が

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} H_n(x) \psi_0(x), \quad H_n(x) = (-1)^n \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(\psi_0(x))^2} \frac{d^n}{dx^n} (\psi_0(x))^2 \quad (5)$$

と表されることを示せ。ただし、任意の可微分関数  $f(x)$  について次の等式が成り立つことをもちいてよい。

$$\left( x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \right) f(x) = -e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \frac{\hbar}{m\omega} \frac{d}{dx} \left( e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} f(x) \right) \quad (6)$$

(8) 第  $n$  励起状態の波動関数が奇関数か偶関数か答えよ。ただし、必要なら場合分けを行うこと。

(9) 第 1 励起状態と第 2 励起状態のそれぞれについて、粒子の存在確率が 0 となる  $x$  軸上の点の座標を求めよ。

(10) 第  $n$  励起状態について、粒子の存在確率が 0 となる  $x$  軸上の点の個数が問 (3) の答えに一致することを示せ。ただし、 $H_n(x)$  が  $x$  の  $n$  次多項式であることと、可微分関数に関する次の性質をもちいてよい。実数に値を取り  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  を満たす可微分関数  $f(x)$  について、 $f(x) = 0$  となる実数  $x$  が  $k$  個存在するとき、 $\frac{d}{dx} f(x) = 0$  となる実数  $x$  は少なくとも  $(k+1)$  個存在する。

## 物理学 II-2 (75 点)

一様な重力下に無限に長い円筒容器を鉛直に立て、質量  $m$  の  $N$  個の粒子よりなる理想気体を容器に入れる。重力加速度を  $g$ 、容器底面の面積を  $A$ 、底面からの高さを  $z$  とすると、気体のハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は、各粒子の運動量  $\mathbf{p}_i$  と位置  $\mathbf{r}_i$  によって、

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_i) \right], \quad U(\mathbf{r}) = \begin{cases} mgz & (\mathbf{r} \text{ が容器の中}) \\ \infty & (\mathbf{r} \text{ が容器の外}) \end{cases} \quad (1)$$

で与えられる。気体は古典統計力学にしたがうとし、温度  $T$  の熱平衡状態にあり、 $k_B$  をボルツマン定数、 $h$  をプランク定数として、以下の問いに答えよ。

(1) 気体の分配関数  $Z$  が次式で与えられることを示せ。

$$Z = \frac{1}{N!} \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3N/2} \left( \frac{k_B T}{mg} A \right)^N \quad (2)$$

(2) 任意の 1 粒子が高さ  $z$  で見出される確率を考慮して、高さ  $z$  の気体の数密度  $n(z)$  を求めよ。

(3) 気体の内部エネルギー  $E$  を求めよ。

(4) 気体の熱容量  $C$  を求めよ。熱容量  $C$  を、箱に閉じ込めた粒子数  $N$  個の重力のない理想気体の定積熱容量と比較し、違いを考察せよ。

容器内の高さ  $z$  における微小高さ  $l$  ( $\ll \frac{k_B T}{mg}$ ) の小空間の気体について考える。気体の粒子数を  $N_i$ 、体積を  $v = Al$ 、重力による位置エネルギーを一定として、以下の問いに答えよ。

(5) 小空間の気体のヘルムホルツの自由エネルギー  $F_i$  を、 $T, v, N_i$  を用いて求めよ。 $N_i$  は十分大きいとして、スターリングの公式  $\ln N_i! \approx N_i \ln N_i - N_i$  を用いてよい。

(6) 小空間の気体の圧力  $P_i$  を  $F_i$  から計算し、問 (2) の結果を用いて高さ  $z$  の圧力  $P(z)$  を求めよ。

(7) 小空間の気体の化学ポテンシャル  $\mu$  を温度  $T$  と高さ  $z = 0$  の圧力  $P_0$  を用いて求め、高さ  $z$  によらず一定であることを示せ。

(8) 任意の高さ  $z$  において小空間の気体が平衡を保つ条件を説明し、条件を満たしていることを示せ。