

問題 I - 1 (75 点)

質点 1 と質点 2 の質量と位置ベクトルを m_1 と \mathbf{r}_1 , 及び m_2 と \mathbf{r}_2 とする. 二つの質点は, ポテンシャル $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ で相互作用しているものとする. 以下では, 時間 t の関数 A に対して $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ とする.

- (1) この系のラグランジュ関数 L を記せ.
- (2) ラグランジュ関数 L とオイラー・ラグランジュの方程式から, 質点 1 と質点 2 の運動方程式を導け.
- (3) 設問 (2) で求めた運動方程式を用いて, 作用反作用の法則が成り立っていることを示し, この系の全運動量

$$\mathbf{P} = m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \quad \textcircled{1}$$

が保存することを示せ.

- (4) 設問 (2) で求めた運動方程式を用いて, この系の全角運動量

$$\mathbf{l} = \mathbf{r}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{r}}_2 \quad \textcircled{2}$$

が保存することを示せ.

以下では, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ の代わりに重心 $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$ と相対位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ を用いる. また煩雑さを避けるために, 全質量 $m_1 + m_2$ を M , 換算質量 $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を μ と記してよい.

- (5) ラグランジュ関数 L を \mathbf{R} と \mathbf{r} で表せ.

以下では, $\dot{\mathbf{R}} = 0$ となる慣性系で考える.

- (6) 全角運動量 \mathbf{l} を \mathbf{r} と $\dot{\mathbf{r}}$ を用いて表せ.
- (7) 全角運動量が保存することから, 相対位置 \mathbf{r} が一つの平面内にとどまることを示せ.
- (8) 設問 (5) で求めたラグランジュ関数 L を極座標 (r, θ, ϕ) を用いて表せ. ここで,

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \quad \textcircled{3}$$

である.

- (9) 設問 (8) で求めたラグランジュ関数 L とオイラー・ラグランジュの方程式より, r, θ, ϕ に対する運動方程式を導け.

以下では、相対位置 \mathbf{r} のとどまる平面が $\theta = \frac{\pi}{2}$ となるように座標系を設定する。

(10) $|\dot{\phi}|$ を全角運動量の大きさ l を用いて表せ。

(11) 全エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r) \quad \text{④}$$

と表される。有効ポテンシャル $V(r)$ を求めよ。

(12) $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ のとき $V(r)$ の概略図を描け。ただし $\alpha > 0$ とする。全角運動量がゼロの場合とゼロでない場合を分けて考えよ。

(13) 全エネルギー E と全角運動量の大きさ l の値によって場合分けし、運動可能な r の範囲を α, μ, E, l を用いて表せ。

問題 I - 2 (75 点)

図 (ア) のように、真空中に半径 a_1 と a_2 の 2 つの円形回路 C_1 と C_2 が、共通の中心軸を持つようにして平行に置かれている。中心間の距離は d で、 $a_1 \ll d$ とする。 C_1 と C_2 に、それぞれ大きさ I_1 と I_2 の定常電流を流したときに、2 つの回路の間にはたらく力を下記の手順で求めよう。ただし、真空の透磁率は μ_0 とする。

まず、 C_1 の作る磁場を求める。

- (1) C_1 と C_2 の中心軸を z 軸に取り、図 (イ) のように座標の原点を C_1 の中心にとる。 C_1 上の点 Q_1 の位置 \mathbf{r}' は、 x 軸からの角度を φ とすると、

$$\mathbf{r}' = (a_1 \cos \varphi, a_1 \sin \varphi, 0) \quad \text{①}$$

である。電流 I_1 が図 (イ) の紙面に対して反時計回りに流れているとき、点 Q_1 における電流の向きの単位ベクトル \mathbf{t}_1 の x, y, z 成分を、 φ を用いて表せ。

- (2) 点 Q_1 における電流素片 (角度 $\varphi \sim \varphi + \Delta\varphi$ の部分) が、図 (ウ) に示した位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の点 P に作る磁場 $\Delta\mathbf{B}$ が

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1 a_1}{4\pi R^3} (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -x \cos \varphi - y \sin \varphi + a_1) \Delta\varphi \quad \text{②}$$

で与えられることを示せ。ただし、 $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ である。

- (3) 原点から点 P までの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と a_1 の比 a_1/r が 1 に比べて十分小さいとすると、 R^{-3} は

$$R^{-3} \simeq \frac{1}{r^3} \left\{ 1 + \frac{3a_1}{r^2} \left(\boxed{} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{a_1}{r} \right)^2 \right\} \quad \text{③}$$

と近似できる。 $\boxed{}$ に当てはまる式を答えよ。

以降の設問では、設問 (3) の近似を用いること。

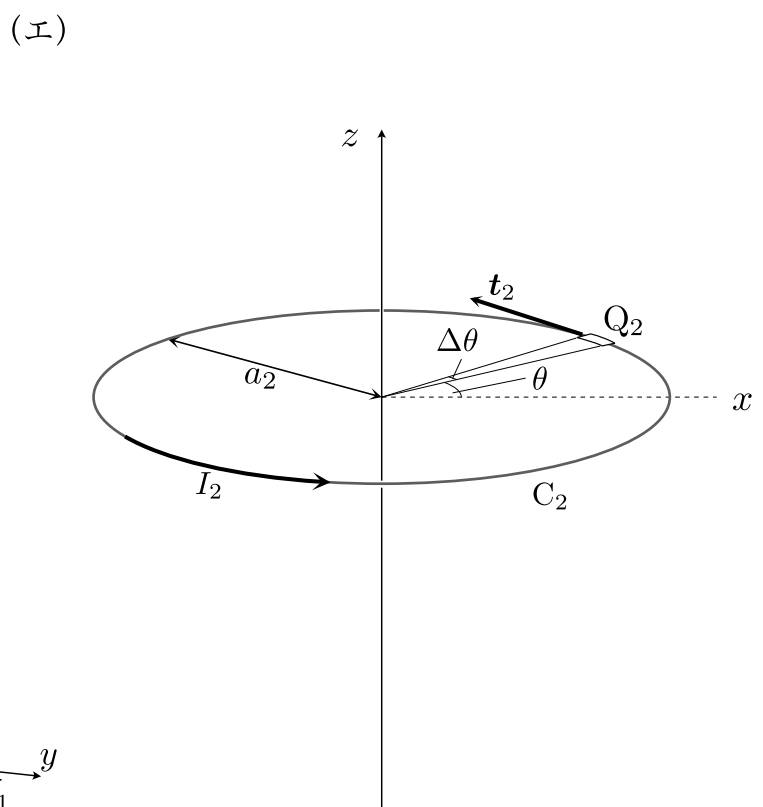
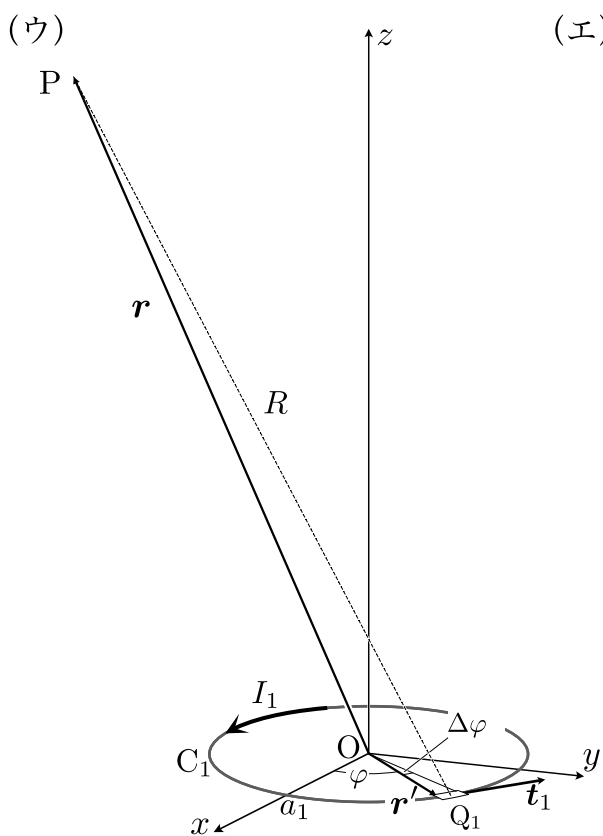
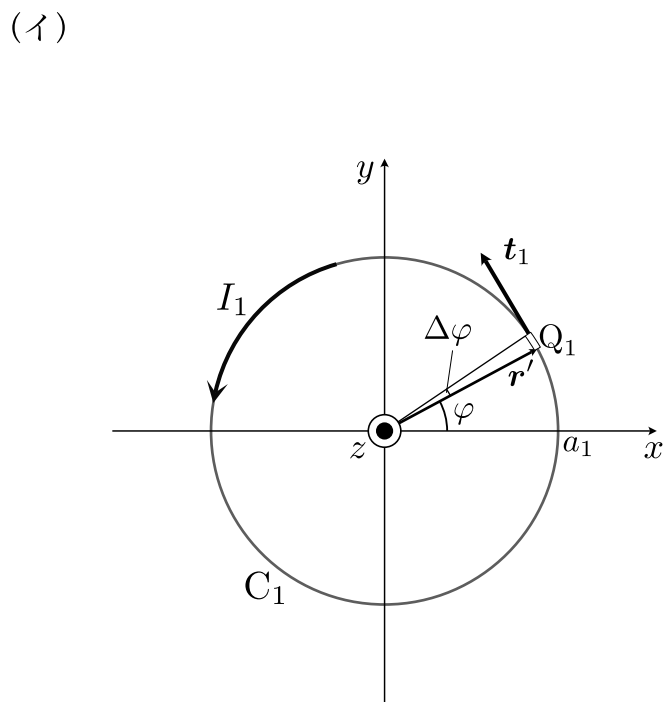
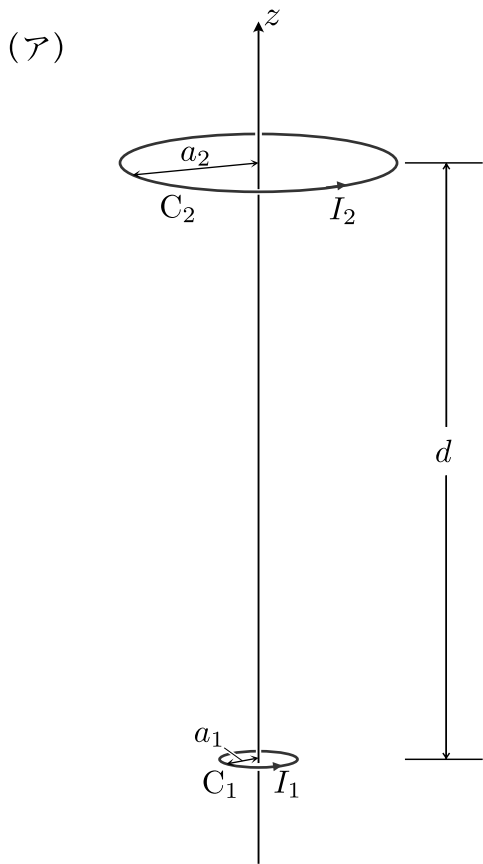
- (4) C_1 が点 P に作る磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の x, y, z 成分を求めよ。

次に、 C_1 の作る磁場が C_2 に及ぼす力 \mathbf{F} について考える。

- (5) C_2 上の位置 $(a_2 \cos \theta, a_2 \sin \theta, d)$ の点 Q_2 における磁場を、 \mathbf{B}_2 とする。また、 C_2 上の電流の向きを、図 (エ) のように C_1 と同じ方向に取り、点 Q_2 における電流の向きの単位ベクトルを \mathbf{t}_2 とおく。このとき、長さ $\Delta s = a_2 \Delta\theta$ の電流素片が \mathbf{B}_2 から受ける力 $\Delta\mathbf{F}$ を、 $a_2, I_2, \Delta\theta, \mathbf{t}_2, \mathbf{B}_2$ を用いて表せ。

- (6) $\Delta\mathbf{F}$ の x, y, z 成分を、 $a_1, a_2, I_1, I_2, d, \theta, \Delta\theta$ を用いて表せ。

- (7) \mathbf{F} の x, y, z 成分を求めよ。その結果から、 C_1 と C_2 の間にはたらく力が、引力と斥力のどちらになるか述べよ。



図

問題 II - 1 (75 点)

微視的な粒子の運動が巨視的な物性にどのように反映するかについて、以下の問題を通して考えてみる。外部環境と接し、体積 V 、温度 T 、化学ポテンシャル μ の熱平衡にある量子系を考える。このとき量子系は、環境とのエネルギー交換、粒子交換により、そのエネルギー、粒子数は確定値を取らない。系が量子状態 (N, j) において粒子数 N 、エネルギー $E_{N,j}$ を取る確率は、大正準分布に従い

$$w_{N,j} = \frac{1}{\Xi(T, V, \mu)} \exp \left[\frac{\mu N - E_{N,j}}{k_B T} \right] \quad (1)$$

として与えられる。以下の問いに答えよ。以下では、ボルツマン定数、光速をそれぞれ k_B, c とし、プランク定数 h に対して $\hbar = h/2\pi$ とする。

(1) ①式において、大分配関数 $\Xi(T, V, \mu)$ が

$$\Xi(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_j \exp \left[\frac{\mu N - E_{N,j}}{k_B T} \right] \quad (2)$$

と書けることを示せ。

(2) 量子系の例として理想ボース気体について考える。系の量子状態は、エネルギー ε_α の 1 粒子状態を占める粒子数 n_α の組 $\{n_\alpha\} \equiv \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ を与えることで一意に指定できる。このとき系の粒子数 N 、エネルギー $E_{N,j}$ は

$$N = \sum_\alpha n_\alpha, \quad E_{N,j} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha n_\alpha \quad (3)$$

と書ける。このとき、②式における和は、次のように占有粒子数についての和を用いて書き直すことができる。

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_j = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \quad (4)$$

このことから大分配関数が

$$\Xi(T, V, \mu) = \prod_\alpha \sum_{n_\alpha=0}^{\infty} \exp \left[\frac{(\mu - \varepsilon_\alpha) n_\alpha}{k_B T} \right] \quad (5)$$

となることを示せ。さらに

$$\Omega(T, V, \mu) \equiv -k_B T \log \Xi(T, V, \mu) \quad (6)$$

で定義されるグランドポテンシャル $\Omega(T, V, \mu)$ が

$$\Omega(T, V, \mu) = k_B T \sum_\alpha \log \left(1 - \exp \left[\frac{\mu - \varepsilon_\alpha}{k_B T} \right] \right) \quad (7)$$

となることを示せ。

(3) エネルギー ε_α を持つ 1 粒子状態を占める粒子数の平均値が

$$\bar{n}_\alpha = \left(\exp \left[\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{k_B T} \right] - 1 \right)^{-1} \quad (8)$$

となることを示せ.

以下では、熱平衡にある理想ボース気体としての光子気体について考える. 光子気体に対する化学ポテンシャルは $\mu = 0$ であり, グランドポテンシャル Ω とヘルムホルツの自由エネルギー F が一致する. 以下の問いに答えよ.

(4) 体積 V の空洞内で角振動数 $\omega \sim \omega + d\omega$ の間にある光子気体の状態数は偏光の自由度が 2 であることを考慮すれば

$$g(\omega)d\omega = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad (9)$$

となる. このとき, (7)式において, $\varepsilon_\alpha \rightarrow \hbar\omega$ とし状態密度 $g(\omega)$ を用いて, α に関する和を ω についての積分とすることができる. すなわち

$$\sum_\alpha \cdots \rightarrow \int_0^\infty d\omega g(\omega) \cdots \quad (10)$$

と置き換える.

このことからヘルムホルツの自由エネルギー F が

$$F = -\frac{\pi^2 V (k_B T)^4}{45 (\hbar c)^3} \quad (11)$$

と書けることを示せ. 必要ならば, 以下の公式を用いてよい.

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (12)$$

(5) 光子気体のエントロピー S , 全エネルギー E , 圧力 P を求めよ.

(6) エネルギー ε と運動量 $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ との関係が

$$\varepsilon = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \quad (13)$$

で与えられる質量 m の粒子からなる理想気体に対しては, 気体の圧力 P と体積 V および, エネルギー E の関係が

$$PV = \frac{2}{3} E \quad (14)$$

のように与えられる. これを設問 (5) で得た光子気体の結果と比較し, 両者の違いの原因を述べよ.

問題 II - 2 (75 点)

1次元空間を運動する1粒子の量子力学を考える。以下の問いに答えよ。必要であれば、次の公式を用いてよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-\beta)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\beta)^2 e^{-\alpha(x-\beta)^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \quad (2)$$

ここで、 α, β は複素数で、 $\operatorname{Re} \alpha > 0$ とする。

- (1) 粒子の位置の演算子 \hat{x} と運動量の演算子 \hat{p} は、位置座標 x の関数として表された波動関数 $\psi(x)$ に対して、

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x), \quad \hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}\psi(x) \quad (3)$$

のように作用する。規格化された波動関数 $\psi(x)$ で表される状態における、粒子の位置と運動量の期待値を与える式を書き、それらの期待値が実数であることを示せ。波動関数は規格化されているので、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $|\psi(x)|^2 \rightarrow 0$ であることに注意せよ。

- (2) 粒子が規格化された波動関数

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\sigma^2} + ik_0x\right) \quad (4)$$

で表される状態にあるとする。ただし、 $\sigma(>0)$ 、 k_0 は実数とする。このとき、次の関係(最小不確定性関係)が成り立つことを示せ。

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad (5)$$

ここで、 $\Delta x, \Delta p$ は \hat{x}, \hat{p} の標準偏差である。すなわち、波動関数 $\psi_0(x)$ で表される状態における物理量 \hat{A} の期待値を $\langle \hat{A} \rangle$ として、 $\Delta x = \sqrt{\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rangle}$ 、 $\Delta p = \sqrt{\langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \rangle}$ である。

以下では、質量 m の自由粒子を考える。粒子の波動関数 $\psi(x, t)$ の時間発展を記述する方程式はシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \quad (6)$$

である。波動関数 $\psi(x, t)$ は

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \varphi(k, t) \quad (7)$$

のようにフーリエ積分の形に表すことができる。逆に、 $\varphi(k, t)$ を $\psi(x, t)$ を用いて表すと、

$$\varphi(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \psi(x, t) \quad (8)$$

である。

- (3) $\varphi(k, t)$ の時間発展を記述する方程式を導け. 関数 $\varphi_0(k)$ が与えられたとして, この方程式の初期条件 $\varphi(k, 0) = \varphi_0(k)$ に対する解 $\varphi(k, t)$ を求めよ.

初期時刻 $t = 0$ における波動関数 $\psi(x, 0)$ が, ④式の $\psi_0(x)$ で与えられたとする.

- (4) $\varphi(k, 0)$ を計算し, 設問 (3) の結果を用いて $\varphi(k, t)$ を求めよ.

- (5) 積分変数を $k' = k - k_0$ に置き換えて ⑦式の積分を実行することにより, $\psi(x, t)$ は

$$\psi(x, t) = C(t) \exp \left[-\frac{\gamma(t)}{4} (x - \bar{x}(t))^2 + ik_0 x - i\frac{\hbar k_0^2}{2m} t \right] \quad \text{⑨}$$

のように表されることを示し, 複素数値関数 $C(t)$, $\gamma(t)$ および実数値関数 $\bar{x}(t)$ を求めよ.

- (6) $|\psi(x, t)|^2$ を計算し, ガウス分布 (正規分布) の形に表せ.

- (7) 時刻 t における \hat{x} の期待値 $\langle \hat{x} \rangle_t$ および標準偏差 $\Delta x_t = \sqrt{\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle_t)^2 \rangle_t}$ を求めよ. ここで, $\langle \hat{A} \rangle_t$ は波動関数 $\psi(x, t)$ で表される状態における物理量 \hat{A} の期待値である.

問題 (50点)

- (1) 以下の文章を読み、空欄を埋めるのに最も適した語をそれぞれの選択肢から選べ。

Non-relativistic quantum mechanics, developed in the years from 1923 to 1926, provides a unified and logically consistent picture of numerous phenomena in the atomic and molecular domain. Following P.A.M. Dirac, we might be tempted to assert: “The underlying physical laws necessary for the mathematical theory of a large part of physics and the whole of chemistry are completely known.”

There are, , basically two reasons for believing that the description of physical phenomena based on non-relativistic quantum mechanics is incomplete. First, since non-relativistic quantum mechanics is formulated in such a way as to yield the non-relativistic energy-momentum relation in the classical limit, it is of accounting for the fine structure of a hydrogen atom. In general, non-relativistic quantum mechanics makes no prediction about the dynamical behavior of particles moving at relativistic . This defect was amended by the relativistic theory of electrons developed by Dirac in 1928. Second, and what is more serious, non-relativistic quantum mechanics is essentially a single-particle theory in which the probability density for finding a given particle integrated over all space is unity at all times. Thus it is not constructed to describe phenomena such as nuclear beta in which an electron and an antineutrino are created as the neutron becomes a proton or to describe even a simpler process in which an excited atom returns to its state by “spontaneously” emitting a single photon in the absence of any external field.

- relativistic: 相対論的な
- amend: 修正する

- i) 選択肢 : therefore, by the way, of course, however, consequently.
- ii) 選択肢 : unable, incapable, impossible, inevitable, unacceptable.
- iii) 選択肢 : velocities, masses, forces, interactions, explosions.
- iv) 選択肢 : fission, destruction, decay, collapse, breakdown.
- v) 選択肢 : basic, fundamental, standard, default, ground.

- (2) 次の英文中の空欄を埋めるのに最も適した語をそれぞれの選択肢から選べ。

- i) A real symmetric can be diagonalized by an orthogonal .
- 選択肢 : vector, matrix, integer, formula, equation.

ii) The series expansion of an analytic complex function in a region D has only terms of positive .

選択肢：numbers, coefficients, powers, poles, roots.

iii) Two or more different states of a quantum mechanical system are said to be if they have the same eigenvalue of Hamiltonian.

選択肢：observable, degenerate, unitary, Hermite, doubled.

iv) The uncertainty of the mean of a measurement is obtained by dividing the standard deviation of the measurement by the square root of the number of data.

選択肢：statistical, systematic, mathematical, methodological, hypothetical.

(3) 次の3つの英文を、それぞれ140文字以内で要約せよ。

i) Take a piece of wire and bend it into a square. Dip it in bubble mixture and blow. Why isn't it a cube-shaped bubble that comes out? Or if the wire is triangular, why can't you blow a pyramid-shaped bubble? Why is it that, regardless of the shape of the frame, the bubble comes out as a perfect spherical ball? The answer is that nature is lazy, and the sphere is nature's easiest shape. The bubble tries to find the shape that uses the least amount of energy, and that energy is proportional to the surface area. The bubble contains a fixed volume of air, and that volume does not change if the shape changes. The sphere is the shape that has the smallest surface area that can contain that fixed amount of air. That makes it the shape that uses the least amount of energy.

ii) The sum of the reciprocals of the prime numbers

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$$

is a divergent series. This theorem goes beyond Euclid's ancient theorem that there are infinitely many primes, and shows that the primes are rather *dense* in the set of all integers - denser than the squares, for example, in that the sum of the reciprocals of the square numbers converges to $\pi^2/6$.

iii) When we look at the limb (edge) of the Sun, we see less-hot layers than we do when we look toward the center. Thus photographs of the Sun show its limb to be darker than its central face. Such limb darkening occurs because the solar atmosphere increases in temperature with depth. At the center of the solar disk, an observer sees the deepest and warmest layers that emit the most light. At the limb, only the upper, cooler layers that produce less light can be seen.

(次ページにも問題が続く)

(4) 次の日本語を英訳せよ.

- i) 物体に生じる加速度は、物体にはたらく力に比例し、物体の質量に反比例する.
- ii) 重力波はアインシュタインによる予言から約 100 年後に直接観測に成功した.
- iii) スカラー場の勾配によって作られるベクトル場の回転はゼロである.
- iv) 単極の磁荷は見つかっておらず、この宇宙には存在しないかもしれない.

出典：J.J. Sakurai “*Advanced Quantum Mechanics*” (Addison-Wesley 1967), Marcus Du Sautoy “*The Number Mysteries*” (Macmillan 2011) , H. M. Edwards “*Riemann’s Zeta Function*” (Dover 1974), F.H. Shu “*The Physics of Astrophysics, Vol. I*” (University Science Books 1991), Encyclopedia Britannica (20 Apr 2018)