2022/04/19

<u>Prop</u> 1.2.11 (1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$\because$ $(\subset)$ [示すこと: $\forall x \in (A \cup B)^c,\ x \in A^c \cap B^c$]

$\forall x \in (A \cup B)^c$ をとる

[示すこと: $x \in A^c \cap B^c$]

$x \in (A \cup B)^c$ より ($x \notin A \cup B$ なので)

$\neg(x \in A \cup B)$

$\therefore \neg(x \in A \vee x \in B)$

$\therefore (\neg x \in A) \wedge (\neg x \in B)$

$\therefore (x \notin A) \wedge (x \notin B)$

$\therefore x \in A^c \wedge x \in B^c$

$\therefore x \in A^c \cap B^c$ //

$(\supset)$ 同様 //

(2) 自習せよ //

Ex. 1.2.17 (1) $\bigcup \mathcal{U} = \mathbb{R}$

☺ $(\subset)$ 明らか.

$(\supset)$ [示すこと: $\bigcup \mathcal{U} \supset \mathbb{R}$

i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \in \bigcup \mathcal{U}$]

$\forall x \in \mathbb{R}$ をとる

[示すこと: $x \in \bigcup \mathcal{U}$.

i.e. $\exists A \in \mathcal{U} : x \in A$]

x の整数部分を n とすると,

$n \in \mathbb{Z}$, $n \leq x < n+1$.

$A := (n-1, n+1)$ とおくと, $A \in \mathcal{U}$

[示すこと: $x \in A$]

$n-1 < n \leq x < n+1$ より

$x \in (n-1, n+1) = A$ //

(2) $\mathcal{U} = \{(-a, a) \mid a > 0\}$, $\bigcap \mathcal{U} = \{0\}$

∵ $(\supset)$ [示すこと: $\bigcap \mathcal{U} \supset \{0\}$

i.e., $\forall x \in \{0\}$, $x \in \bigcap \mathcal{U}$]

$\forall x \in \{0\}$ をとる

すなわち $x = 0$.

[示すこと: $x \in \bigcap \mathcal{U}$

i.e., $\forall A \in \mathcal{U}$, $x \in A$]

$\forall A \in \mathcal{U}$ をとる.

[示すこと: $x \in A$]

$A \in \mathcal{U}$ より $\exists a > 0$: $A = (-a, a)$

$a > 0$ より $0 \in (-a, a) = A$

x"

//

(c) $\left[\begin{array}{l} \text{示すこと: } \bigcap \mathcal{U} \subset \{0\} \\ \text{i.e., } \{0\}^c \subset \mathbb{R} - (\bigcap \mathcal{U}) \\ \text{i.e., } \forall x \in \{0\}^c, \ x \notin \bigcap \mathcal{U} \end{array}\right]$

$\forall x \in \{0\}^c$ をとる.

すなわち $x \neq 0$.

$\left[\begin{array}{l} \text{示すこと: } x \notin \bigcap \mathcal{U} \\ \text{i.e., } \neg(\forall A \in \mathcal{U}, \ x \in A) \\ \text{i.e., } \exists A \in \mathcal{U} : x \notin A \end{array}\right]$

$A := \left(-\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{2}\right)$ とおく.

$x \neq 0$ より $\frac{|x|}{2} > 0$, $\therefore A \in \mathcal{U}$.

[示すこと: $x \notin A$]

$|x| > \frac{|x|}{2}$ より $x \notin A$ //

$$\left(\begin{array}{l} \frac{|x|}{2} < x \\ \text{or} \\ -x < -\frac{|x|}{2} \end{array}\right)$$