2022/04/26

<u>Ex. 1.4.3</u> $f : \underset{\{1, 2\}}{\underset{\parallel}{A}} \longrightarrow \underset{\{x, y\}}{\underset{\parallel}{B}}$, $\quad \begin{array}{l} 1 \longmapsto x \\ 2 \longmapsto x \end{array}$ とする.

(1) $f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{x\}$.

$f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{x, x\} = \{x\}$.

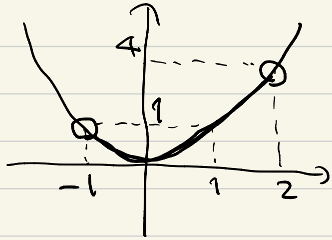
(2) $f^{-1}(\{x\}) = \{a \in A \mid \underbrace{f(a) \in \{x\}}_{\Leftrightarrow f(a) = x}\} = \{1, 2\}$

$f^{-1}(\{y\}) = \{a \in A \mid \underbrace{f(a) \in \{y\}}_{\Leftrightarrow f(a) = y}\} = \phi$ //

Ex. 1.4.4 $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ とする.

(1) $$f(\mathbb{R}) = \{ \underbrace{f(x)}_{=x^2} \mid x \in \mathbb{R} \} = [0, +\infty)$$

$$f((-1,2)) = \{ \underbrace{f(x)}_{=x^2} \mid x \in (-1,2) \} = [0,4)$$



(2) $$f^{-1}((-1,4)) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (-1,4) \} = (-2,2)$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 < 4$$

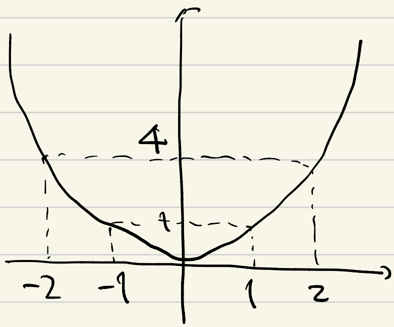
$$\Leftrightarrow \quad -2 < x < 2$$

$$f^{-1}((1,4)) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in (1,4) \}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < x^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < |x| < 2$$

$$= (-2,-1) \cup (1,2)$$



Thm 1.4.5

(1) $P_1 \subset P_2$ とする.

[示すこと: $f(P_1) \subset f(P_2)$
i.e., $\forall b \in f(P_1)$, $b \in f(P_2)$]

$\forall b \in f(P_1)$ をとる.

[示すこと: $b \in f(P_2)$
i.e., $\exists a \in P_2$: $b = f(a)$]

$b \in f(P_1)$ より $\exists a \in P_1$: $b = f(a)$

仮定より $a \in P_1 \subset P_2$

[示すこと: $b = f(a)$]

a のとりかたより $b = f(a)$ //

(2) $f(P_1 \cup P_2) = f(P_1) \cup f(P_2)$

($\subset$) [示すこと: ${}^\forall b \in f(P_1 \cup P_2)$, $b \in f(P_1) \cup f(P_2)$]

${}^\forall b \in f(P_1 \cup P_2)$ をとる.

[示すこと: $b \in f(P_1) \cup f(P_2)$]

$b \in f(P_1 \cup P_2)$ より ${}^\exists a \in P_1 \cup P_2 : b = f(a)$

$a \in P_1 \cup P_2$ より $a \in P_1 \vee a \in P_2$

(i) $a \in P_1$ のとき,

$b = f(a) \in f(P_1) \subset f(P_1) \cup f(P_2)$

(ii) $a \in P_2$ のとき,

$b = f(a) \in f(P_2) \subset f(P_1) \cup f(P_2)$

//

(⊃) [示すこと: $\forall b \in f(P_1) \cup f(P_2)$, $b \in f(P_1 \cup P_2)$]

$\forall b \in f(P_1) \cup f(P_2)$ をとる.

[示すこと: $b \in f(P_1 \cup P_2)$]

bのとり方より $b \in f(P_1) \vee b \in f(P_2)$

(i) $b \in f(P_1)$ のとき,

$P_1 \subset P_1 \cup P_2$ より $b \in f(P_1) \subset f(P_1 \cup P_2)$

(ii) $b \in f(P_2)$ のとき

同様に $b \in f(P_2) \subset f(P_1 \cup P_2)$

//

Rem この場合は

$b \in f(P_1 \cup P_2) \Longleftrightarrow b \in f(P_1) \cup f(P_2)$

を示してもよい。しかし (3) をみると

$b \in f(P_1 \cap P_2) \Longleftrightarrow b \in f(P_1) \cap f(P_2)$

は不成立。要注意。

Thm 1.4.6

(1) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ とする.

[示すこと : $f^{-1}(\mathcal{O}_1) \subset f^{-1}(\mathcal{O}_2)$
i.e., $\forall a \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)$, $a \in f^{-1}(\mathcal{O}_2)$]

$\forall a \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ をとる.

[示すこと : $a \in f^{-1}(\mathcal{O}_2)$
i.e., $f(a) \in \mathcal{O}_2$]

$a \in f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ より $f(a) \in \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$

$\therefore$ $a \in f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ //

(2) $f^{-1}(\Theta_1 \cup \Theta_2) = f^{-1}(\Theta_1) \cup f^{-1}(\Theta_2)$

($\subset$) [示すこと: $\forall a \in f^{-1}(\Theta_1 \cup \Theta_2)$, $a \in f^{-1}(\Theta_1) \cup f^{-1}(\Theta_2)$]

$\forall a \in f^{-1}(\Theta_1 \cup \Theta_2)$ とする.

[示すこと: $a \in f^{-1}(\Theta_1) \cup f^{-1}(\Theta_2)$]

$a \in f^{-1}(\Theta_1 \cup \Theta_2)$ より

$$f(a) \in \Theta_1 \cup \Theta_2$$

$$\therefore\ f(a) \in \Theta_1 \ \vee\ f(a) \in \Theta_2$$

$\Leftrightarrow a \in f^{-1}(\Theta_1)$ $\quad$ $\Leftrightarrow a \in f^{-1}(\Theta_2)$

$\therefore\ a \in f^{-1}(\Theta_1) \cup f^{-1}(\Theta_2)$ //

($\supset$) 逆に辿れ。 //

Rem $f(P_1 \cap P_2) \supset f(P_1) \cap f(P_2)$ の反例.

Ex1.4.3 の f を考える.

$$f : \underset{\{1,2\}}{\underset{\shortparallel}{A}} \longrightarrow \underset{\{x,y\}}{\underset{\shortparallel}{B}}, \quad f(1) = f(2) = x.$$

このとき, $P_1 = \{1\}$, $P_2 = \{2\}$ とおくと,

$$f(P_1 \cap P_2) = f(\{1\} \cap \{2\}) = f(\phi) = \phi.$$

$$f(P_1) \cap f(P_2) = f(\{1\}) \cap f(\{2\})$$

$$= \{x\} \cap \{x\} = \{x\}.$$

よってこのとき,

$$f(P_1 \cap P_2) \not\supset f(P_1) \cap f(P_2)$$

//