2022/05/06

Rem 1.4.11

(1) $f(A)=B \iff f(A) \supset B$

$\iff \forall b \in B,\ b \in f(A)$

$\iff \exists a \in A : b = f(a)$

$\iff f$: 全射

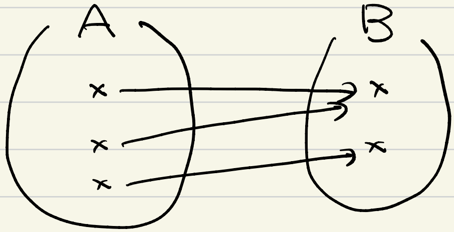
(2) f: 単射 $\iff \forall a, a' \in A\ (f(a)=f(a')),\ a=a'$

$\iff \forall a, a' \in A,$ "$f(a)=f(a') \Rightarrow a=a'$"

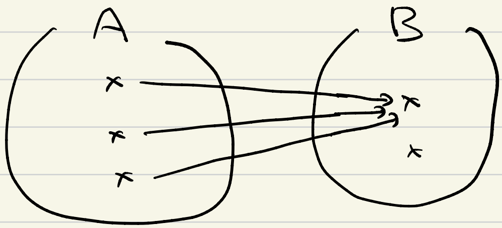
$\iff$

"$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$"

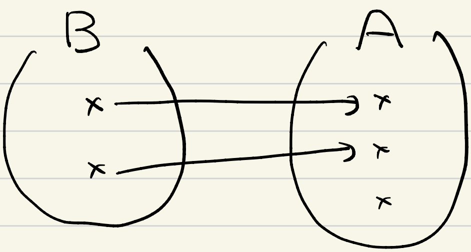
Ex. 1.4.12



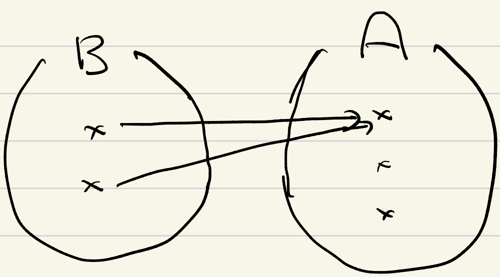
全射
（単射でない）



全射でない
（単射でない）



単射
（全射でない）



単射でない
（全射でない）

(bijection)

Ex 1.4.13 $f: A \to A : a \mapsto a$ は全単射

∵) 全射を示す

[示すこと: $^\forall b \in A, ^\exists a \in A : b = f(a)$]

$^\forall b \in A$ をとる.

[示すこと: $^\exists a \in A : b = f(a)$]

$a := b \in A$ とおく.

[示すこと: $b = f(a)$]

$f(a) = a = b$ //

単射を示す.

[示すこと: $^\forall a, a' \in A \, (f(a) = f(a'))$, $a = a'$]

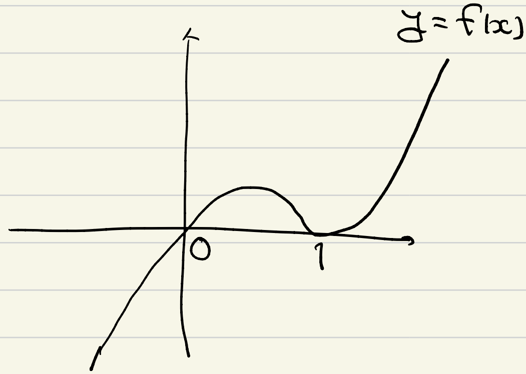
$^\forall a, a' \in A \, (f(a) = f(a'))$ をとる.

[示すこと: $a = a'$]

$a = f(a) = f(a') = a'$ //

Ex. 1.4.14

(2) $f(x) = x^3 - x$



全射：中間値の定理

（式変形で示すのは面倒）

単射でない

∵ [示すこと: $\exists a, a' \in \mathbb{R}\ (f(a) = f(a')) : a \neq a'$]

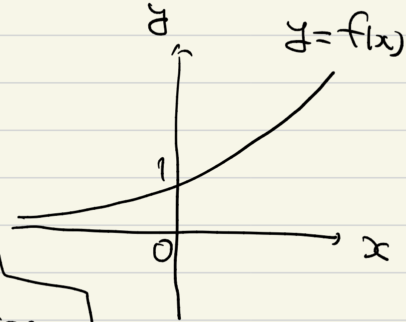
$a = 0$, $a' = 1$ とおくと.

$f(a) = f(0) = 0 = f(1) = f(a')$

[示すこと: $a \neq a'$]

$a = 0 \neq 1 = a'$ //

(3) $f(x) = e^x$



全射でない

∵ [示すこと: $\exists b \in \mathbb{R}$: $\forall a \in \mathbb{R},\ b \neq f(a)$]

$b := -1$ とおくと、$b \in \mathbb{R}$

[示すこと: $\forall a \in \mathbb{R},\ b \neq f(a)$]

$\forall a \in \mathbb{R}$ をとる

[示すこと: $b \neq f(a)$]

$$f(a) = e^a > 0 > -1 = b$$

//

単射

∵ [示すこと: $\forall a, a' \in \mathbb{R} \left(f(a) = f(a') \right),\ a = a'$]

$\forall a, a' \in \mathbb{R} \left(f(a) = f(a') \right)$ をとる

[示すこと: $a = a'$]

$e^a = f(a) = f(a') = e^{a'}$ の $\log$ をとると $a = a'$

//

Prop. 1.4.16 (1)

$\because$ [示すこと: $^\forall b \in f(P_1) \cap f(P_2)$, $b \in f(P_1 \cap P_2)$]

$^\forall b \in f(P_1) \cap f(P_2)$ をとる.

[示すこと: $b \in f(P_1 \cap P_2)$

i.e., $^\exists a \in P_1 \cap P_2 : b = f(a)$]

$b \in f(P_1) \cap f(P_2)$ より

$$b \in f(P_1) \wedge b \in f(P_2)$$

$\therefore$ $^\exists a_1 \in P_1 : b = f(a_1) \wedge {}^\exists a_2 \in P_2 : b = f(a_2)$

ここで, $f(a_1) = b = f(a_2)$, f: 単射 より

$$a_1 = a_2$$

よって $a := a_1 = a_2$ とおくと, $a \in P_1 \cap P_2$.

[示すこと: $b = f(a)$]

$$f(a) = f(a_1) = b \qquad //$$

(2) [示すこと: $\forall b \in f(A-P)$, $b \in f(A) - f(P)$]

$\forall b \in f(A-P)$ をとる

[示すこと: $b \in f(A) - f(P)$

i.e., $b \in f(A) \wedge b \notin f(P)$]

$b \in f(A-P)$ より

$\exists a \in A-P$: $b = f(a) \in f(A)$

<u>claim</u> $b \notin f(P)$

$b \in f(P)$ と仮定すると,

$\exists a' \in P$: $b = f(a')$

f: 単射 で, $f(a) = b = f(a')$ より

$A-P \ni a = a' \in P$ 矛盾

$\therefore$ $b \notin f(P)$ //

(3) 小テスト

Prop 1.4.17

[示すこと: $\forall b \in Q$, $b \in f(f^{-1}(Q))$]

$\forall b \in Q$ をとる

[示すこと: $b \in f(f^{-1}(Q))$

i.e., $\exists a \in f^{-1}(Q) :$ $b = f(a)$]

$b \in Q \subset B$, f: 全射 より

$\exists a \in A :$ $b = f(a)$

ここで $f(a) = b \in Q$ より $a \in f^{-1}(Q)$

[示すこと: $b = f(a)$]

aの作り方 より $b = f(a)$

//