2022/05/10

Thm 1.4.22

(1) $f: A \to B$, $g: B \to C$: 全射とする

[示すこと: $g \circ f: A \to C$: 全射

i.e. $\forall c \in C, \exists a \in A: c = (g \circ f)(a)$]

$\forall c \in C$ をとる

[示すこと: $\exists a \in A: c = (g \circ f)(a)$]

g: 全射より $\exists b \in B: c = g(b)$

f: 全射より $\exists a \in A: b = f(a)$

[示すこと: $c = (g \circ f)(a)$]

$$(g \circ f)(a) = g\left(f(a)\right) = g(b) = c \qquad //$$

Note

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\forall c \in C} \arrow[r, dashed, "\text{示}"] \arrow[d] & \boxed{\exists a \in A} \\
\boxed{c \in C} \arrow[r, "\text{仮定}"] & \boxed{b \in B} \arrow[dl] \\
\boxed{b \in B} \arrow[r] & \boxed{a \in A} \arrow[uu, bend right]
\end{tikzcd}$$

(2) f, g: 単射とする

[示すこと: $g \circ f$: 単射

i.e. $\forall a, a' \in A \left((g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') , a = a' \right)$]

$\forall a, a' \in A \ \left((g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \right)$ とする

[示すこと: $a = a'$]

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') = g(f(a'))$$

と g: 単射 より

$$f(a) = f(a')$$

f: 単射 より $\quad a = a'$ //

Note

$$\begin{tikzcd}
\boxed{g \circ f(a) = g \circ f(a')} \arrow[r, dashed, "示"] \arrow[d] & \boxed{a = a'} \\
\boxed{g(b) = g(b')} \arrow[r] & \boxed{b = b'} \arrow[dl] \\
\boxed{f(a) = f(a')} \arrow[r] & \boxed{a = a'} \arrow[uu, bend right]
\end{tikzcd}$$

Prop 1.4.23

(1) $g \circ f$: 全射とする

[示すこと: g : 全射

i.e., $\forall c \in C,\ \exists b \in B : c = g(b)$]

$\forall c \in C$ をとる

[示すこと: $\exists b \in B : c = g(b)$]

$g \circ f$: 全射より

$\exists a \in A : c = (g \circ f)(a)$

$b := f(a)$ とおくと、 $b \in B$

[示すこと: $c = g(b)$]

$$g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = c \quad //$$

Note

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\forall c \in C} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \boxed{\exists b \in B} \\
\boxed{c \in C} \arrow[r] & \boxed{\exists a \in A} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

(2) $g \circ f$: 単射 とする

$\left[\begin{array}{l} \text{示すこと:} \quad f : \text{単射} \\ \quad \text{i.e.,} \quad {}^{\forall} a, a' \in A \ \big(f(a) = f(a') \big), \quad a = a' \end{array} \right]$

${}^{\forall} a, a' \in A \ \big(f(a) = f(a') \big)$ をとる

$\left[\text{示すこと:} \quad a = a' \right]$

$f(a) = f(a')$ より

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big) = g\big(f(a')\big) = (g \circ f)(a')$$

$g \circ f$: 単射 より

$$a = a' \qquad //$$

Note

$$\begin{tikzcd} \boxed{f(a) = f(a')} \arrow[r, dashed, "\text{示}"] \arrow[d] & \boxed{a = a'} \\ \boxed{(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{a = a'} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Prop 1.4.25

(:) [示すこと: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

i.e. $\forall a \in A$, $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$]

$\forall a \in A$ をとる.

[示すこと: $((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a)$]

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a))$$
$$= h(g(f(a)))$$
$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a))$$
$$= h(g(f(a)))$$

//

__Recall__ $\Gamma : A \to B$ に対し，

$$\Gamma^{-1}(b) := \{ a \in A \mid b \in \Gamma(a) \}$$

__Thm 1.4.27__

__(1) ⇒ (3)__ f：全単射 とする．

$\left[\begin{array}{l} \text{示すこと：} \quad \text{逆対応 } f^{-1} \text{ は 写像} \\ \quad \text{i.e., } \forall b \in B, \ \# f^{-1}(b) = 1 \end{array} \right]$

$\forall b \in B$ をとる．

$\left[\text{示すこと：} \quad \# f^{-1}(b) = 1 \right]$

__claim__ $\# f^{-1}(b) \geq 1$, i.e., $f^{-1}(b) \neq \phi$

$\because$) f：全射 より

$\exists a \in A : b = f(a) \quad \therefore a \in f^{-1}(b)$

__claim__ $\# f^{-1}(b) \leq 1$

$\because$) $a, a' \in f^{-1}(b)$ とすると，

$f(a) = b = f(a')$ ． f：単射 より
$a = a'$ //

$(3) \Rightarrow (2)$ f^{-1}: 写像 とする

すなわち $b = f(a) \Longleftrightarrow f^{-1}(b) = a$ — $(*)$

[示すこと: f^{-1} が 逆写像

i.e., $f^{-1} \circ f = I_A \wedge f \circ f^{-1} = I_B$]

<u>claim</u> $f^{-1} \circ f = I_A$

∵) [示すこと: $\forall a \in A$, $f^{-1} \circ f(a) = a$]

$\forall a \in A$ をとる

[示すこと: $(f^{-1} \circ f)(a) = a$]

$b = f(a)$ とおくと. $f^{-1}(b) = a$

$$\therefore \ (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a \quad //$$

<u>claim</u> $f \circ f^{-1} = I_B$

∵) 同様 //

(2) $\Rightarrow$ (1)　$\exists g: B \to A$: fの逆写像 とする

[示すこと: f: 全単射]

<u>claim</u>　f: 全射

$\because$) [示すこと: ${}^\forall b \in B$, $\exists a \in A$: $b = f(a)$]

${}^\forall b \in B$ をとる

[示すこと: $\exists a \in A$: $b = f(a)$]

$a := g(b)$ とおくと, $a \in A$

[示すこと: $b = f(a)$]

$$f(a) = f(g(b)) = \underbrace{(f \circ g)}_{= I_B}(b) = b \quad //$$

<u>claim</u>　f: 単射

$\because$) [示すこと: ${}^\forall a. a' \in A\,(f(a) = f(a'))$, $a = a'$]

${}^\forall a. a' \in A\,(f(a) = f(a'))$ をとる

[示すこと: $a = a'$]

$f(a) = f(a')$ より　$\underset{\overset{\shortparallel}{a}}{g \circ f(a)} = \underset{\overset{\shortparallel}{a'}}{g \circ f(a')}$ //