2022/05/17

Prop 1.5.5

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap B)$

$(\subset)$ [示すこと: $\forall x\in\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cap B,\ x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap B)$]

$\forall x\in\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cap B$ をとる.

[示すこと: $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap B)$

i.e., $\exists \lambda_0\in\Lambda : x\in A_{\lambda_0}\cap B$]

xのとり方より

$$\underbrace{x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}_{①} \wedge \underbrace{x\in B}_{②}$$

① より $\exists \lambda_0\in\Lambda : x\in A_{\lambda_0}$ ——③

[示すこと: $x\in A_{\lambda_0}\cap B$]

③, ② より $x\in A_{\lambda_0}\cap B$ //

(⊃) $\left[\text{示すこと: } \forall x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cap B),\ x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B\right]$

$\forall x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda \cap B)$ をとる.

$\left[\begin{array}{l} \text{示すこと: } x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B \\ \text{i.e. } x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ \wedge\ x \in B \\ \text{i.e. } \exists \lambda_0 \in \Lambda : x \in A_{\lambda_0} \end{array}\right]$

x のとり方より

$$\exists \lambda_0 \in \Lambda : \quad x \in A_{\lambda_0} \cap B$$

$$\therefore\ x \in A_{\lambda_0} \ \wedge\ x \in B$$

よって $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ \wedge\ x \in B$

$$\therefore\ x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B \quad //$$

(2) 同様! //

Prop 1.5.6

(1) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$

∵

(⊂) と (⊃) をまとめて示す

$x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c$

$\iff \neg\left(x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$

$\iff \neg\left(\exists \lambda\in\Lambda : x \in A_\lambda\right)$

$\iff \forall \lambda\in\Lambda,\ x \notin A_\lambda$

i.e. $x \in A_\lambda^c$

$\iff x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$ //

(2) 同様 //

Prop 1.5.7

(1) $$f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$$

(⊂) $\Big[$ 示すこと: $\forall b \in f\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\big),\ b \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$ $\Big]$

$\forall b \in f\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\big)$ をとる.

$\Big[$ 示すこと: $b \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$

i.e., $\exists \lambda\in\Lambda :\ b \in f(P_\lambda)$ $\Big]$

$b \in f\big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda\big)$ より

$\exists a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda :\ b = f(a)$

$a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ より

$\exists \lambda\in\Lambda :\ a \in P_\lambda$

$\Big[$ 示すこと: $b \in f(P_\lambda)$ $\Big]$

$a \in P_\lambda$ より

$b = f(a) \in f(P_\lambda)$ //

(⊃) [示すこと: $\forall b \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$, $b \in f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda)$]

$\forall b \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$ をとる.

[示すこと: $b \in f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda)$

i.e, $\exists a \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$: $b = f(a)$]

$b \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(P_\lambda)$ より

$\exists \lambda \in \Lambda$: $b \in f(P_\lambda)$

$b \in f(P_\lambda)$ より

$\exists a \in P_\lambda$: $b = f(a)$

このとき $a \in P_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$

[示すこと: $b = f(a)$]

a のとり方 より $b = f(a)$ //

(2) 小テスト 5. //

(3) $f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} O_\mu\right) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(O_\mu)$

∵ (⊂) [示すこと: $\forall a \in f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} O_\mu\right),\ a \in \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(O_\mu)$]

$\forall a \in f^{-1}\left(\bigcup_{\mu\in M} O_\mu\right)$ をとる

[示すこと: $a \in \bigcup_{\mu} f^{-1}(O_\mu)$

i.e, $\exists \mu \in M:\ a \in f^{-1}(O_\mu)$]

$a \in f^{-1}\left(\bigcup O_\mu\right)$ より

$f(a) \in \bigcup_{\mu\in M} O_\mu$

$\therefore\ \exists \mu \in M:\ f(a) \in O_\mu$

[示すこと: $a \in f^{-1}(O_\mu)$]

$f(a) \in O_\mu$ より $a \in f^{-1}(O_\mu)$ //

(⊃) 今のを逆に辿れ //

(4) 自習 //