2022/05/20

Thm 1.5.13

∵ (1) ($\Leftarrow$) 前にやった.

($\Rightarrow$) $f: A \to B$: surj. とする (見ておくだけ)

[示すこと: $\exists s: B \to A$ (map) : $f \circ s = I_B$]

集合族 $\left(f^{-1}(\{b\}) \right)_{b \in B}$ を考える.

f : surj. より

$$\forall b \in B, \quad f^{-1}(\{b\}) \neq \phi$$

選出公理 より

$$\prod_{b \in B} f^{-1}(\{b\}) \neq \phi$$

すなわち

$$\exists (a_b)_{b \in B} \in \prod_{b \in B} f^{-1}(\{b\})$$

これを用いて 次のように def:

$$s: B \longrightarrow A$$
$$b \longmapsto a_b$$

[示すこと: $f \circ s = I_B$

i.e. $\forall b \in B$, $f \circ s(b) = b$]

$\forall b \in B$ をとる

[示すこと: $f \circ s(b) = b$]

$$f \circ s(b) = f(a_b) = b$$

$(\because a_b \in f^{-1}(\{b\}))$ //

(2) ($\Leftarrow$) 前にやった.

($\Rightarrow$) $f : A \to B$: inj.

[示すこと: $\exists r : B \to A$ (map): $r \circ f = I_A$]

$$f' : A \to f(A), \quad a \mapsto f(a)$$ と定めると, bij.

より $\exists (f')^{-1} : f(A) \to A$: 逆写像

r を次でdef: ($a_0 \in A$ を fix)

$$r : B \to A$$
$$b \mapsto \begin{cases} (f')^{-1}(b) & (b \in f(A)) \\ a_0 & (b \notin f(A)) \end{cases}$$

[示すこと: $r \circ f = I_A$
i.e., $\forall a \in A$, $r \circ f(a) = a$]

$\forall a \in A$ をとる.

[示すこと: $r \circ f(a) = a$]

$$
\begin{aligned}
r \circ f(a) &= r\big(f(a)\big) \\
&= (f')^{-1}\big(\underbrace{f(a)}_{= f'(a)}\big) \qquad \big(\because\ f(a) \in f(A)\big) \\
&= a \qquad //
\end{aligned}
$$

Cor.

∵ (みておく)

($\Rightarrow$) $f : A \to B$: inj. とする.

[示すこと: $\exists r : B \to A$: surj.]

Thm より

$$\exists r : B \to A \ : \ r \circ f = I_A .$$

[示すこと: r : surj.

i.e, $\exists s : A \to B \ : \ r \circ s = I_A$]

$s := f$ とおくと, $s : A \to B$

[示すこと: $r \circ s = I_A$]

$$r \circ s = r \circ f = I_A \qquad //$$

($\Leftarrow$) 同様 //