2020/06/07

$f: A \to B$

Prop 1.6.14 (みればOK)

∵) [示すこと: ${}^\forall [a] \in A/\sim$, $\# \bar{f}([a]) = 1$]

${}^\forall [a] \in A/\sim$ をとる.

[示すこと: $\# \bar{f}([a]) = 1$]

$\bar{f}([a]) = \{ f(a') \mid a' \in [a] \}$

$f(a) \in \bar{f}([a])$ より $\bar{f}([a]) \neq \phi$

(i.e. $\# \bar{f}([a]) \geq 1$)

claim $\# \bar{f}([a]) \leq 1$

∵) [示すこと: ${}^\forall b, b' \in \bar{f}([a])$, $b = b'$]

${}^\forall b, b' \in \bar{f}([a])$ をとる.

[示すこと: $b = b'$]

$b, b' \in \bar{f}([a])$ より ${}^\exists a_1, a_2 \in [a]$: $b = f(a_1)$, $b' = f(a_2)$

$a_1, a_2 \in [a]$ より $a_1 \sim a_2$

仮定 より $\underset{b}{f(a_1)} = \underset{b'}{f(a_2)}$ //

Ex. 1.6.15

∵ (1) 自習

(2) [示すこと: $\forall x, x' \in \mathbb{R}\ (x \sim x'),\ f(x) = f(x')$]

$\forall x, x' \in \mathbb{R}\ (x \sim x')$ をとる

[示すこと: $f(x) = f(x')$]

$x \sim x'$ より $\underbrace{x - x'}_{k} \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ x = x' + k$

よって

$$f(x) = (\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x)$$

$$= (\cos \underbrace{2\pi(x'+k)}_{=2\pi x' + 2\pi k},\ \sin 2\pi(x'+k))$$

$$= (\cos 2\pi x',\ \sin 2\pi x')$$

$$= f(x')$$

//

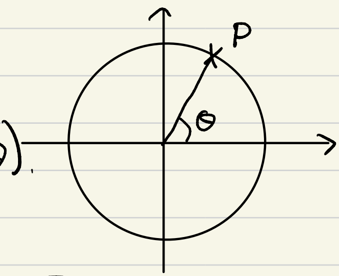
(3) 全射

[示すこと: $\forall p \in S^1,\ \exists a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : p = \bar{f}(a)$]

$\forall p \in S^1$ をとる.

[示すこと: $\exists a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : p = \bar{f}(a)$]

$p \in S^1$ より



$\exists \theta \in \mathbb{R} : p = (\cos\theta, \sin\theta)$.

$a := [\frac{\theta}{2\pi}]$ とおくと,

$a \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

[示すこと: $p = \bar{f}(a)$]

$$\bar{f}(a) = \bar{f}\left(\left[\frac{\theta}{2\pi}\right]\right) = f\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

$$= \left(\cos 2\pi \cdot \frac{\theta}{2\pi},\ \sin 2\pi \cdot \frac{\theta}{2\pi}\right) = p$$

//

単射

[示すこと: $\forall a, b \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ (\bar{f}(a) = \bar{f}(b)) \ , \ a = b$]

$\forall a, b \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \ (\bar{f}(a) = \bar{f}(b))$ をとる

[示すこと: $a = b$]

$a, b \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ より

$$\exists t, t' \in \mathbb{R} : \quad a = [t] \ , \ b = [t']$$

a.bのとり方より

$$\begin{array}{l} \bar{f}(a) = f(t) = (\cos 2\pi t \ , \ \sin 2\pi t) \\ \quad \| \\ \bar{f}(b) = f(t') = (\cos 2\pi t' \ , \ \sin 2\pi t') \end{array}$$

よって

$$2\pi t - 2\pi t' \in \underbrace{2\pi \mathbb{Z}}_{2\pi\text{の整数倍}}$$

$$\therefore \ t - t' \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \ t \sim t'$$

したがって $a = [t] = [t'] = b$ //

Prop. 1.6.16

∵ （自力で復元せよ）

［示すこと: $\bar{f}$: 全射

i.e., $\forall b \in B, \ \exists \alpha \in A/\sim : \ b = \bar{f}(\alpha)$］

$\forall b \in B$ をとる

［示すこと: $\exists \alpha \in A/\sim : \ b = \bar{f}(\alpha)$］

$f : A \to B$: surj. より

$\exists a \in A : \ b = f(a)$

$\alpha := [a]$ とおくと, $\alpha \in A/\sim$

［示すこと: $b = \bar{f}(\alpha)$］

$$\bar{f}(\alpha) = \bar{f}([a]) = f(a) = b \quad //$$

イメージ

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A/\sim \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & B \end{tikzcd}$$

Ex. 1.6.17

(∵) （自力で復元せよ）

$$\pi\circ f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad を誘導する.$$
$$a \longmapsto [2a]$$

(1) [示すこと: $\forall a, a' \in \mathbb{Z}\ (a \sim a')$, $[2a] = [2a']$]

$\forall a, a' \in \mathbb{Z}\ (a \sim a')$ をとる

[示すこと: $[2a] = [2a']$

i.e., $\exists k \in \mathbb{Z} : \quad 2a - 2a' = 3k$]

$a \sim a'$ より $\exists k' \in \mathbb{Z} : \quad a - a' = 3k'$

$k := 2k'$ とおくと, $k \in \mathbb{Z}$.

[示すこと: $2a - 2a' = 3k$]

$$2a - 2a' = 2(a - a') = 2 \times 3k' = 3k$$

//

(2) 全て かいてみる:

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\}$$

$$\bar{f}([0]) = [2 \times 0] = [0]$$

$$\bar{f}([1]) = [2 \times 1] = [2]$$

$$\bar{f}([2]) = [2 \times 2] = [4] = [1]$$

よって 全単射 //

<u>Rem</u> もちろん def に従って示しても よい.

全単射を

Ex. 1.6.19

(1) 自習

(2) 小テスト

(3) [示すこと: $\forall \alpha, \alpha' \in A/_\sim \ (\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(\alpha')),\ \alpha = \alpha'$]

$\forall \alpha, \alpha' \in A/_\sim \ (\bar{f}(\alpha) = \bar{f}(\alpha'))$ をとる

[示すこと: $\alpha = \alpha'$]

$\alpha \in A/_\sim$ より $\exists a \in A : \alpha = [a]$

$\alpha' \in A/_\sim$ より $\exists a' \in A : \alpha' = [a']$

とりかたより $\underset{f(a)}{\underset{\shortparallel}{\bar{f}(\alpha)}} = \underset{f(a')}{\underset{\shortparallel}{\bar{f}(\alpha')}}$

$\sim$ の定め方より

$a \sim a'$

$\therefore \ \alpha = [a] = [a'] = \alpha'$

//