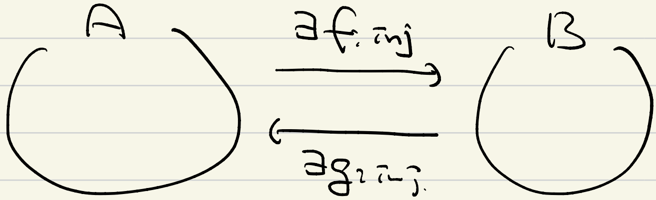
2022/06/17

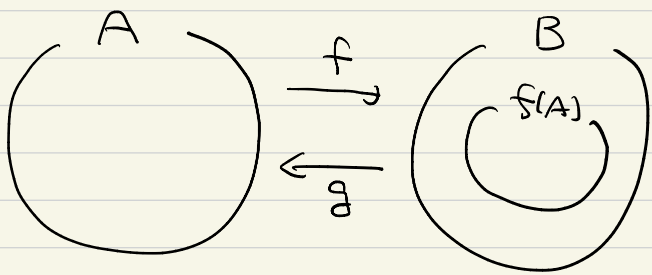
<u>Thm</u> 2.1.7 (Bernstein の定理)　(みておく)

(1)



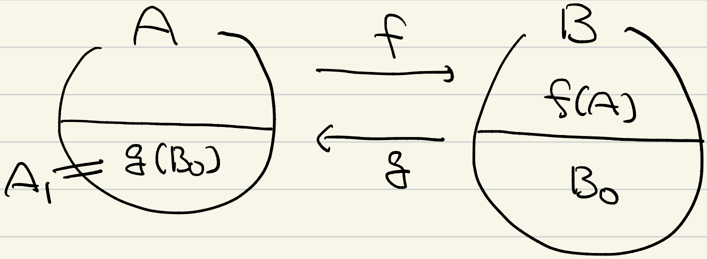
とする.

(A ~ B を示したい。)



$A \sim f(A)$ は成立.

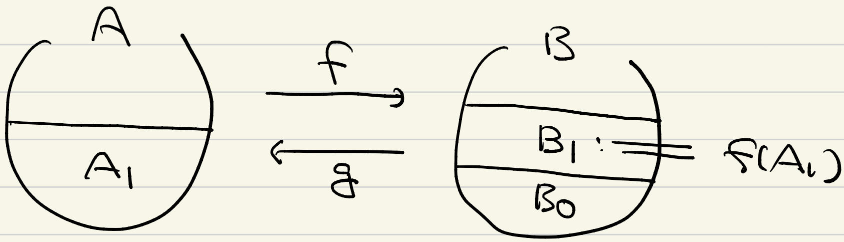
$B_0 := B - f(A)$ を何とかしたい.



$A_1 := g(B_0)$ とおく.

このとき $B_0 \sim A_1$

(しかし $A - g(B_0) \sim f(A)$ は不明)



$B_1 := f(A_1)$ とおく. すると $B_1 \sim A_1$

($A - A_1 \sim B - (B_0 \cup B_1)$ だから,
$A_1 \sim B_0 \cup B_1$ は不明)

以下, くり返す

$$A_n := g(B_{n-1})$$

$$B_n := f(A_n)$$

$$A_* := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ , \ B_* := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

と定める.

claim $\quad g(B_*) = A_*$

∵) $(\subset)$ [示すこと: ${}^\forall a \in g(B_*)$, $a \in A_*$]

${}^\forall a \in g(B_*)$ をとる.

[示すこと: $a \in A_* \left(= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$

i.e, $\exists n : a \in A_n$]

像の def より $\exists b \in B_* : a = g(b)$

$b \in B_* = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ より

$\exists n : b \in B_{n-1}$

[示すこと: $a \in A_n$]

$a = g(b) \in g(B_{n-1}) = A_n$ //

(⊃) [示すこと: $\forall a \in A_*$, $a \in g(B_*)$]

$\forall a \in A_*$ をとる

[示すこと: $a \in g(B_*)$

i.e., $\exists b \in B_* : a = g(b)$]

$a \in A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ より

$\exists n : a \in A_n$

$a \in A_n = g(B_{n-1})$ より

$\exists b \in B_{n-1} \subset B_* : a = g(b)$ //

従って $g : B_* \longrightarrow A_* :$ bij.

<u>claim</u> $f(A - A_*) = B - B_*$

∵) 同様 //

つまり $f : A - A_* \longrightarrow B - B_* :$ bij.

合わせると $A \sim B$

//

Thm 2.2.1

∵ (ざっくり ver.)

A : 無限集合とする.

$A \neq \phi$ より $\exists a_1 \in A$.

$A - \{a_1\} \neq \phi$ より $\exists a_2 \in A - \{a_1\}$.

(よって $a_1 \neq a_2$)

$A - \{a_1, a_2\} \neq \phi$ より ……

これを"無限にくり返す"と,

$$\underbrace{\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}}_{\text{可算集合}} \subset A$$

選択公理を使って正当化できる

//

Thm 2.2.3

(1) ∵ A, B : 高々可算とする

[示すこと: $A \times B$: 高々可算

i.e., $\exists C$: 可算, $\exists f : A \times B \to C$: inj.]

仮定より $\exists f_1 : A \to \mathbb{N}$: inj.

$\exists f_2 : B \to \mathbb{N}$: inj.

これを使って $C := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: 可算

$$f : A \times B \longrightarrow C$$
$$(a, b) \longmapsto (f_1(a), f_2(b))$$

とおくと, f : inj.

(演習)

//

(2) 示すこと: $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$: 高々可算

i.e., $\exists C$: 可算, $\exists f : C \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$: surj.

Λ: 高々可算より $C := \Lambda\times\mathbb{N}$: 可算

A_λ: 高々可算より $\exists f_\lambda : \mathbb{N} \to A_\lambda$: surj.

これらを使って

$$
\begin{aligned}
f : C &\longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \\
(\lambda, n) &\longmapsto f_\lambda(n)
\end{aligned}
$$

とおくと, f は surj. //

演習

Cor 2.2.4 $\mathbb{Q}$ は可算

∵

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}\times\mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\
(m, n) &\longmapsto \frac{m}{n}
\end{aligned}
$$

が surj. より //