2022/06/21

Note

1	2	0	4
3	1	4	1
5	9	2	6
5	3	9	8

4つの数が4個ある

それ以外の4つの数をつくれ

ans) 対角部分が ちがう数を えらべば良い

1	2	0	4
3	1	4	1
5	9	2	6
5	3	9	8

→ たとえば

2 2 3 9

(対角に +1 したもの)

Thm 2.2.5 $\aleph_0 < \aleph$

∵ $\aleph_0 \leq \aleph$ はOK，"$\neq$" を示せばよい

$\mathrm{card}\,\mathbb{N} \neq \mathrm{card}\,(0,1)$ を示す

$\mathrm{card}\,\mathbb{N} = \mathrm{card}\,(0,1)$ と仮定。

$\therefore \exists f : \mathbb{N} \to (0,1)$: bij.

(0,1)の元は小数で表す

$$\begin{cases} f(1) = 0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 \cdots \\ f(2) = 0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 \cdots \\ \quad \vdots \\ f(n) = 0.a_1^n a_2^n a_3^n \cdots \end{cases}$$

(a_j^i は 1ケタの数 $(0 \sim 9)$)

このとき、"対角の数から作る実数" がとれるので、

f : surj. に矛盾

($x = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots$ を、$b_i = 9 - a_i^i$ 等によって定めると、$x \notin f(\mathbb{N})$)

//

Note 「対角線論法」という有名なもの。

みて楽しんだら、それで良い。

($\mathcal{P}(M)$ は巾集合)

Thm 2.2.7

∵
$$\begin{cases} (1) & \mathrm{card}\, M \leqq \mathrm{card}\, \mathcal{P}(M) \\ (2) & \mathrm{card}\, M \neq \mathrm{card}\, \mathcal{P}(M) \end{cases}$$

を示す。

(1) [示すこと: $\exists f : M \to \mathcal{P}(M)$: inj]

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathcal{P}(M) \\ x &\longmapsto \{x\} \end{aligned}$$ は inj.

//

(2) [示すこと: $\forall f : M \to \mathcal{P}(M)$: map, f: surj でない]

$\forall f : M \to \mathcal{P}(M)$: map をとる.

[示すこと: f: surj でない

i.e. $\exists B \in \mathcal{P}(M) : \forall x \in M,\ B \neq f(x)$]

$$B := \{ y \in M \mid y \notin f(y) \}$$

とおくと, $B \subset M$ i.e. $B \in \mathcal{P}(M)$

[示すこと: $\forall x \in M$, $B \neq f(x)$]

$\forall x \in M$ をとる

[示すこと: $B \neq f(x)$]

$x \in f(x)$ のとき、

Bのdefより $x \notin B$ $\therefore B \neq f(x)$

$x \notin f(x)$ のとき、

Bのdefより $x \in B$ $\therefore B \neq f(x)$

//

Prop 2.3.1

［示すこと: $\mathrm{card}(A \sqcup B) = \mathrm{card}(A' \sqcup B')$

i.e., $\exists f : A \sqcup B \longrightarrow A' \sqcup B'$: bij.］

仮定より

$$\left.\begin{array}{l} \exists f_1 : A \to A' \\ \exists f_2 : B \to B' \end{array}\right\} : \text{bij.}$$

f を次で定める:

$$\begin{aligned} f : A \sqcup B &\longrightarrow A' \sqcup B' \\ x &\longmapsto \begin{cases} f_1(x) & (x \in A) \\ f_2(x) & (x \in B) \end{cases} \end{aligned}$$

このとき（$\sqcup$ は非交和なので）

f は bij. //