2022/07/05

Prop 3.2.2

(∵) [示すこと: $\forall a, b \in A$ (最大元), $a = b$]

$\forall a, b \in A$ (最大元) をとる.

[示すこと: $a = b$]

a : max より $b \leqq a$

b : max より $a \leqq b$

$\leqq$ の公理より $a = b$ //

Prop 3.2.4

(∵) a : max とする.

[示すこと: $\forall x \in X$, $a \not< x$]

$\forall x \in X$ をとる.

[示すこと: $a \not< x$]

$a < x$ と仮定。

a : max より $x \leqq a$

$x \leqq a < x$ は矛盾 //

Ex. 3.2.5 $A := \mathbb{N} - \{1\} = \{2, 3, 4, \cdots\}$

claim $\nexists a \in A$: 極大元

∵) [示すこと: $\forall a \in A$, a : 極大でない]

$\forall a \in A$ をとる.

[示すこと: a : 極大でない

i.e. $\exists x \in A : \begin{cases} a < x \\ a \neq x \end{cases}$]

$x := 2a$ とおくと.

$a < 2a = x$ かつ $a \neq x$ //

claim $\nexists a \in A$: 最小元

∵) [示すこと: $\forall a \in A$, aは最小でない]

$\forall a \in A$ をとる.

[示すこと: a は最小でない

i.e. $\exists x \in A$: $a \nleq x$]

$a = 2$ のとき, $2 \nleq 3$

$a \neq 2$ のとき. $a \nleq 2$ //

claim　$a \in A$: 極小 $\iff$ a : prime

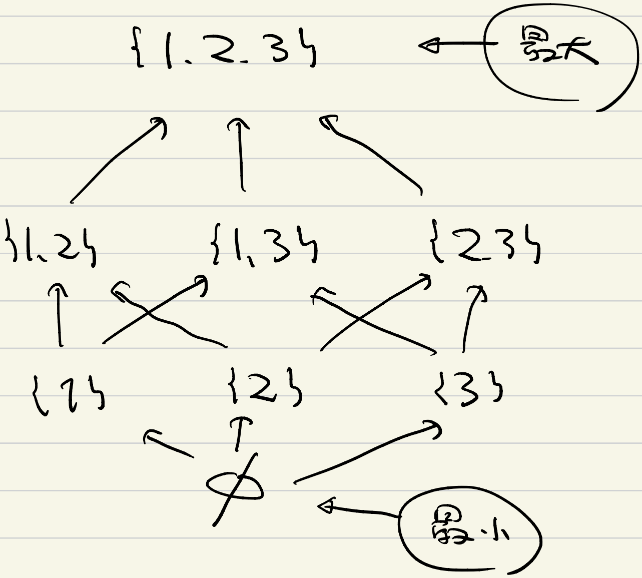
∵) 極小でない

$\iff$ $\exists \underbrace{x \in A}_{\{2,3,4,\dots\}}$: $\underbrace{x < a}$　i.e. $x < a$, $x \neq a$

$\iff$ a : prime　//

Ex. 3.26

∵) $X = \{1,2,3\}$ で 図でます



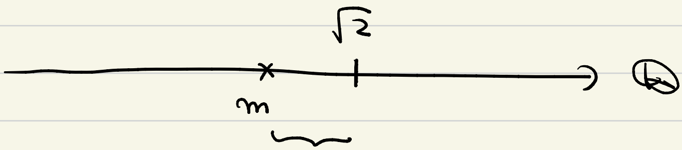
Ex. 3.2.10 $(\mathbb{Q}, \leq)$

$M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ は上限なし

∵ $\exists m \in \mathbb{Q}$: M の上限 と仮定。

$m \in \mathbb{Q}$ より $m^2 \neq 2$, $m > 0$ とする.

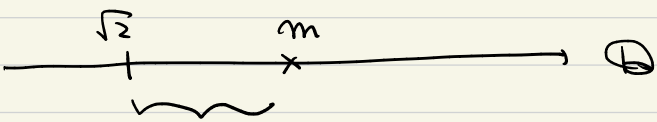
(1) $m^2 < 2$ のとき,



この辺にも有理数があるので.

m は 上界でない

(2) $m^2 > 2$ のとき,



ここに有理数 m' がある

m' も M の上界なので. 矛盾

//

Prop 3.2.12 ($f: A \to A'$)

∵ [示すこと: f: inj.

i.e, $\forall a, b \in A\ (f(a) = f(b)),\ a = b$]

$\forall a, b \in A\ (f(a) = f(b))$ をとる

[示すこと: $a = b$]

$f(a) = f(b)$ より

$f(a) \leqq' f(b)$

仮定より $a \leqq b$

同様に $f(b) \leqq' f(a)$ なので

仮定より $b \leqq a$

順序の公理より $a = b$ //