2022/07/12

Lem 3.3.13

㊀ $\exists x \in W$: $f(x) \not\geq x$ と仮定する。

$\downarrow$ W: 整列, とくに全順序

$f(x) < x$

よって $A := \{ a \in W \mid f(a) < a \} \neq \phi$

W: 整列 より

$\exists \min A =: a_0$

$a_0 \in A$ より

$f(a_0) < a_0$

f: 順序を保つので

$f(f(a_0)) \leqq f(a_0)$

f: inj より

$f(f(a_0)) < f(a_0)$

$\therefore f(a_0) \in A$

これは $f(a_0) < a_0 = \min A$ に矛盾 //

Lem 3.3.14

∵ (1) $\exists a \in W : W \simeq W\langle a\rangle$ と仮定。

すると $\exists f : W \to W\langle a\rangle$: 順序同型

$W\langle a\rangle \subset W$ なので、(値域をとりかえて)

$$f' : W \to W \quad : \text{順序単射}$$
$$x \mapsto f(x)$$

前のLem ($\forall x \in W, f(x) \geqq x$) より

$$f(a) \geqq a$$

これは $f(a) \in W\langle a\rangle$ に矛盾 //

(2) $\exists a.b \in W\ (a \neq b) : W\langle a\rangle \simeq W\langle b\rangle$ と仮定。

W は全順序なので

$$a > b \quad \text{or} \quad a < b$$

$a > b$ のときだけやればよい:

$$W\langle b\rangle \subset W\langle a\rangle =: W'$$

とおくと、 $\underbrace{W'\langle b\rangle = W\langle b\rangle \simeq W\langle a\rangle}_{}$, $W\langle a\rangle = W'$

これは (1) に矛盾 //

Thm 3.3.12 の "後半"

∵ (1) かつ (2) が成立すると仮定。

$$\begin{array}{ccc} W & \overset{(1)}{\simeq} & W' \\ {\scriptstyle (2)}\wr\wr & & \\ W'\langle a' \rangle & & \end{array}$$

これは Lem (1) に矛盾 //

(1) かつ (3) : 同様 //

(2) かつ (3) が成立すると仮定。

$$W \simeq W'\langle a' \rangle$$

つまり $\exists f : W \longrightarrow W'\langle a' \rangle$: 順序同型

よって

$$\begin{array}{rcl} W\langle a \rangle & \simeq & (W'\langle a' \rangle)\langle f(a) \rangle \\ \wr\wr & & \\ & = & W'\langle f(a) \rangle \\ W' & & \end{array}$$

これも 先の Lem に矛盾 //

Thm 3.3.15

∵ $f, g : W \to W$: 順序同型とする.

[示すこと: $f = g$

i.e., $\forall a \in W$, $f(a) = g(a)$]

$\forall a \in W$ をとる。

[示すこと: $f(a) = g(a)$]

f : 順序同型 より

$$W\langle a\rangle \simeq W\langle f(a)\rangle$$

同じく

$$W\langle a\rangle \simeq W\langle g(a)\rangle$$

よって $W\langle f(a)\rangle \simeq W\langle g(a)\rangle$

Lem $\left(a \neq b \Rightarrow W\langle a\rangle \not\simeq W\langle b\rangle \right)$ より

$$f(a) = g(a)$$

//

Lem 3.3.17

(ii) [示すこと: $\forall x \in J,\ \forall y \in W\ (y < x),\ y \in J$]

$\forall x \in J,\ \forall y \in W\ (y < x)$ をとる.

[示すこと: $y \in J$

i.e. $\exists y' \in W' : W\langle y \rangle \simeq W'\langle y' \rangle$]

$x \in J$ より

$\exists x' \in W' : W\langle x \rangle \simeq W'\langle x' \rangle$

よって $\exists f : W\langle x \rangle \longrightarrow W'\langle x' \rangle$: 順序同型

$y < x$ より $y \in W\langle x \rangle$

$y' := f(y)$ とおくと, $y' \in W'$

[示すこと: $W\langle y \rangle \simeq W'\langle y' \rangle$]

$$\underset{W\langle x \rangle}{\underset{\cap}{W\langle y \rangle}} \simeq (W'\langle x' \rangle)\langle y' \rangle = W'\langle y' \rangle$$

//

Lem 3.3.18

∵) 各 $x \in J$ に対して,

$$W\langle x\rangle \simeq W'\langle x'\rangle$$

となる x' は一意的なので,

$$f : J \to J' \quad : \text{map が得られる.}$$
$$x \mapsto x'$$

claim f : bij

∵) 逆向きの $f' : J' \to J$ も同様につくれて, これが f の逆写像だから //

claim f : 順序写像

∵) [示すこと: $\forall x, y \in J\ (x \leq y),\ f(x) \leq f(y)$]

$\forall x, y \in J\ (x < y)$ をとる.

[示すこと: $f(x) < f(y)$]

$$W\langle y\rangle \simeq W'\langle f(y)\rangle$$
$$\cup \qquad\qquad \cup$$
$$W\langle x\rangle \simeq W'\langle f(x)\rangle$$

より $f(x) < f(y)$ //

//

<u>Lem</u> 3.3.19

∵ $J = W\langle a\rangle$, $J' = W'\langle a'\rangle$ と仮定。

上の Lem より

$$W\langle a\rangle = J \simeq J' = W'\langle a'\rangle$$

なので、 $a \in J = W\langle a\rangle = \{b \in W \mid b < a\}$

これは矛盾 //