2022/07/14

Ex. 3.4.2

∵ (1) $(A, \leqq)$: 有限な順序集合とする

[示すこと: $\forall W \subset A$ (W: 全順序, $\neq \emptyset$), Wは上限をもつ]

$\forall W \subset A$ (W: 全順序, $\neq \emptyset$) をとる.

[示すこと: Wは上限をもつ]

W: 有限、全順序 なので

$\exists \max W$. これが上限 //

(2) [示すこと: $(\mathbb{N}, \leqq)$: 帰納的でない

i.e. $\exists W \subset \mathbb{N}$ (W: 全順序, $\neq \emptyset$): Wは上限なし]

自明 //

(3) [示すこと: ${}^{\forall}W \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (W: 全順序, $\neq \emptyset$),

W は 上限 をもつ]

${}^{\forall}W \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (W: 全順序, $\neq \emptyset$) をとる

[示すこと W は 上限 をもつ]

$\infty \in W$ のとき,

∞ が 上限

$\infty \notin W$ のとき, $W \subset \mathbb{N}$.

W が 上に有界なら $\max W$ が 上限

そうでないなら, ∞ が 上限

//

Lem 3.4.4

∵ 各 $x \in A$ に対して，

$$M_x := \{ y \in A \mid x < y \}.$$

仮定より $M_x \neq \phi$.

選出公理 より

$$\prod_{x \in A} M_x \neq \phi.$$

$$\therefore \exists (\varphi(x)) \in \prod_{x \in A} M_x.$$

これにより $\varphi : A \to A,\ x \mapsto \varphi(x)$ を定めると，

$\varphi(x) \in M_x$ より $x < \varphi(x)$ //

Lem 3.4.6

$(W,O), (W',O') \in \mathfrak{M}$ に対して,

$(W,O) \leqq (W',O') \;:\Longleftrightarrow\; (W,O) = (W',O')$ or (W,O) は (W',O') の切片.

(∵) [示すこと: $^\forall \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$: 全順序, $\neq \phi$),

$\mathfrak{N}$ は 上限 をもつ]

$^\forall \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}$: 全順序, $\neq \phi$) をとる

[示すこと: $\mathfrak{N}$ は 上限 をもつ

i.e, $^\exists (W^*, O^*) \in \mathfrak{M}$: (W^*, O^*) は $\mathfrak{N}$ の上限]

(イメージ: $\mathfrak{N} = \{ (W_1, O_1) \leqq (W_2, O_2) \leqq \cdots \}$)

$$W^* := \bigcup_{(W,O) \in \mathfrak{N}} W$$ とおき,

O^* は "うまく決める"

以下同様

($x, y \in W^*$ において,

$x \, O^* \, y \;:\Longleftrightarrow\; {}^\exists (W,O) \in \mathfrak{N}$: $x, y \in W$, $x \, O \, y$)

Lem 34.7

∵) [示すこと: $\forall A \subset W \sqcup \{\infty\}$ $(A \neq \emptyset)$, $\exists \min A$]

$\forall A \subset W \sqcup \{\infty\}$ $(A \neq \emptyset)$ をとる.

[示すこと: $\exists \min A$]

$$\min A = \begin{cases} \infty & (A = \{\infty\}) \\ \min(A \cap W) & (\text{others}) \end{cases}$$

//

Thm 34.5

∵) 上の $\mathfrak{M}$ は 帰納的 なので.

Zorn's lemma より

$\exists (W, O) \in \mathfrak{M}$: 極大元

claim $W = A$

∵) $W \subsetneq A$ と仮定。

Lem 34.7 より $W \sqcup \{w\}$ も整列になる

極大性に矛盾 //

//

Rem 3.4.8

（整列定理 $\Longrightarrow$ 選出公理）

$\because$ [示すこと：$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $A_\lambda \neq \phi$
$\Longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \phi$]

$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $A_\lambda \neq \phi$ を考える.

[示すこと：$\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \phi$]

$A := \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とおく.

整列定理より $\exists \leq$ on A：$(A, \leq)$：整列.

（つまり $\phi \neq {}^\forall W \subset A$, $\exists \min W$）

よって $\phi \neq A_\lambda \subset A$ より

$\exists \min A_\lambda$

$\therefore (\min A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ //

Thm 3.4.9

∵ m, n : 集合の濃度 とする.

$\exists M, N$: 集合 s.t. $\begin{cases} m = \mathrm{card}\, M \\ n = \mathrm{card}\, N \end{cases}$

整列定理より

$\exists \leqq_M, \leqq_N$: $(M, \leqq_M), (N, \leqq_N)$: 整列

整列集合の比較定理より

(1) $M \simeq N$,

(2) $M \simeq N\langle n \rangle$, or

(3) $M\langle m \rangle \simeq N$.

(1) のとき $m = n$

(2) のとき $m \leqq n$

(3) のとき $m \geqq n$

//