2022/07/22

Prop 3.5.3

∵ 順序であることの証明は 自習.

[示すこと: $^\forall W \subset A \sqcup B$ $(W \neq \phi)$, Wは最小元をもつ]

$^\forall W \subset A \sqcup B$ $(W \neq \phi)$ をとる

[示すこと: Wは最小元をもつ]

$W \cap A \neq \phi$ のとき,

$\min(W \cap A)$ が存在. これが最小元

$W \cap A = \phi$ のとき,

$W \neq \phi$ より $W \cap B \neq \phi$

$\therefore$ $\min(W \cap B)$ が存在, これが最小元 //

Ex. 35.6

∵ $1+\omega=\omega$

$\mathrm{ord}(\{0\}\sqcup\mathbb{N}) = 1+\omega$ である.

[示すこと: $\exists f: \{0\}\sqcup\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: 順序同型]

$$f: \{0\}\sqcup\mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n+1$$ とおけばよい //

$\omega \neq \omega+1$

$\mathrm{ord}(\mathbb{N}\sqcup\{\infty\}) = \omega+1$ である.

[示すこと: $\nexists f: \mathbb{N}\sqcup\{\infty\} \to \mathbb{N}$: 順序同型]

$\exists f: \mathbb{N}\sqcup\{\infty\} \to \mathbb{N}$: 順序同型と仮定.

このとき $\infty = \max(\mathbb{N}\sqcup\{\infty\})$

なので, $f(\infty) = \max\mathbb{N}$.

存在しない 矛盾 //

Prop 3.5.8

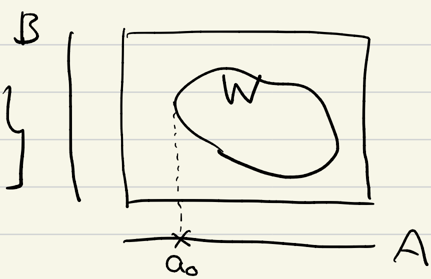
(∵) $\leqq$ が順序であることの証明は自習

[示すこと: $\forall W \subset A \times B \ (W \neq \emptyset)$, Wは最小元をもつ]

$\forall W \subset A \times B \ (W \neq \emptyset)$ をとる.

[示すこと: $\exists \min W$]

$$W_A := \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in W\}$$



とおくと, $W_A \neq \emptyset$

A: 整列 より

$$\exists \min W_A =: a_0$$

$$W_{a_0} := \{b \in B \mid (a_0, b) \in B\}$$

とおくと, $W_{a_0} \neq \emptyset$.

B: 整列 より $\exists \min W_{a_0} =: b_0$

すると (a_0, b_0) が Wの最小元 //

(自習: 示せ。)