2022/07/26

Ex. 3.62 の演算：

(1) $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) := \{ f : X \to \mathbb{R} : \text{map} \}$.

このとき、
$$f+g : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$
$$\lambda f : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

これを "関数の和，λ から一倍" という

Def 3.63 の補足：

"一次独立" ≒ "ムダがない" ;

たとえば $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0$ とすると,

$$x_3 = -\frac{2}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2.$$

なので, x_3 は なくても済む ...

<u>Thm</u> 3.6.8

Zornの補題

帰納的順序集合は極大元をもつ

∵) $\mathfrak{M} := \{ N \subset X \mid N は C をみたす \}$

とおく.

$(\mathfrak{M}, \subset)$ は順序集合

帰納的

$:\Leftrightarrow \forall W \subset A \begin{pmatrix} W: 全順序 \\ \neq \phi \end{pmatrix}$

∃ 上限

<u>claim</u> $(\mathfrak{M}, \subset)$: 帰納的

$\left(\text{i.e.}, \ \forall \mathfrak{n} \subset \mathfrak{M} \begin{pmatrix} \mathfrak{n}: 全順序 \\ \neq \phi \end{pmatrix}, \ ∃ 上限 \right)$

∵) $\forall \mathfrak{n} \subset \mathfrak{M} \begin{pmatrix} \mathfrak{n}: 全順序 \\ \neq \phi \end{pmatrix}$ をとる.

[示すこと : $\mathfrak{n}$ は 上限 をもつ]

$N^* := \bigcup \mathfrak{n} = \bigcup_{N \in \mathfrak{n}} N$ とおく.

これが 上限 になる。

<u>claim</u> $N^* \in \mathfrak{M}$

i.e. N^* は C をみたす

i.e. N^* の ∀有限部分集合は C をみたす

$\subseteq$

どこかの $N_1 \in \mathfrak{n}$ に入るので.

//

$(\mathfrak{M}, \subset)$ は帰納的な順序集合

よって Zorn の補題より

$(\mathfrak{M}, \subset)$ は極大元 M をもつ.

i.e. C をみたす極大な部分集合 //

Thm 3.64

∵ V：ベクトル空間，$W \subset V$ とし，

C：Wは1次独立 とおく．

すると，Cは有限的

$\therefore \exists B \subset V$：$C$をみたし極大．

claim B：基底 i.e. BはVを生成

∵ ［示すこと：${}^\forall v \in V$，$\exists x_1, \cdots, x_n \in B$，
$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in K$：$v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$］

${}^\forall v \in V$ をとる。

［示すこと：$\exists x_i \in B$，$\exists \lambda_i \in K$：$v = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$］

$B \cup \{v\}$ は 1次独立でないので，

$\exists x_i \in B$，$\exists \lambda_i \in K$ $\left((\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \cdots, 0) \right)$：

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} v = 0$$

$\{x_1, \cdots, x_n\}$：1次独立 より $\lambda_{n+1} \neq 0$．

$$\therefore v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} x_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} x_n \quad //$$