2022/09/27

Ex. 1.1.7

(1) [示すこと: ${}^\forall a \in (0, +\infty)$, ${}^\exists \varepsilon > 0$: $U(a;\varepsilon) \subset (0, +\infty)$]

${}^\forall a \in (0, +\infty)$ をとる.

[示すこと: ${}^\exists \varepsilon > 0$: $U(a;\varepsilon) \subset (0, +\infty)$]

$\varepsilon := \dfrac{a}{2}$ とおくと, $a \in (0, +\infty)$ より $\varepsilon > 0$.

[示すこと: $U(a;\varepsilon) \subset (0, +\infty)$

i.e., ${}^\forall x \in U(a;\varepsilon)$, $x \in (0, +\infty)$]

${}^\forall x \in U(a;\varepsilon)$ をとる.

[示すこと: $x \in (0, +\infty)$, i.e. $x > 0$]

$x \in U(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ より

$$x > a - \varepsilon = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$$

$\blacksquare$

(2) [示すこと: $\exists a \in [0, +\infty) : \forall \varepsilon > 0,\ U(a;\varepsilon) \not\subset [0, +\infty)$]

$a := 0$ とおくと, $a \in [0, +\infty)$

[示すこと: $\forall \varepsilon > 0,\ U(a;\varepsilon) \not\subset [0, +\infty)$]

$\forall \varepsilon > 0$ をとる.

[示すこと: $U(a;\varepsilon) \not\subset [0, +\infty)$] (*)

$$U(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

$$= (-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset [0, +\infty)$$

$(\because -\varepsilon < 0)$ ∎

(*)を まじめに示すと…

[示すこと: (*), i.e. $\exists x \in U(a;\varepsilon) : x \notin [0, +\infty)$]

$x := -\frac{\varepsilon}{2}$ とおくと,

$-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} < 0 < \varepsilon$ より $x \in U(a;\varepsilon)$

[示すこと: $x \notin [0, +\infty)$]

$x = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$ より $x \notin [0, +\infty)$.

$\underline{\text{Ex.}}$ 1.1.8

[示すこと: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$]

$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ をとる.

[示すこと: $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

i.e. $\forall a \in O_1 \cap O_2$, $\exists \varepsilon > 0$: $U(a;\varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$]

$\forall a \in O_1 \cap O_2$ をとる.

[示すこと: $\exists \varepsilon > 0$: $U(a;\varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$]

$a \in O_1$ より $\exists \varepsilon_1 > 0$: $U(a;\varepsilon_1) \subset O_1$

$a \in O_2$ より $\exists \varepsilon_2 > 0$: $U(a;\varepsilon_2) \subset O_2$

$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと, $\varepsilon > 0$.

[示すこと: $U(a;\varepsilon) \subset O_1 \cap O_2$

i.e. $\forall x \in U(a;\varepsilon)$, $x \in O_1 \cap O_2$]

$\forall x \in U(a;\varepsilon)$ をとる.

示すこと: $x \in O_1 \cap O_2$

i.e., $x \in O_1$ かつ $x \in O_2$

$\varepsilon \leq \varepsilon_1$ より $x \in U(a;\varepsilon) \subset U(a;\varepsilon_1) \subset O_1$

$\varepsilon \leq \varepsilon_2$ より $x \in U(a;\varepsilon) \subset U(a;\varepsilon_2) \subset O_2$

$\blacksquare$

Ex. 1.1.9

[示すこと: $\forall y \in f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$, $y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$]

$\forall y \in f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ をとる.

[示すこと: $y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$

i.e. $\forall \lambda \in \Lambda$, $y \in f(A_\lambda)$]

$\forall \lambda \in \Lambda$ をとる.

[示すこと: $y \in f(A_\lambda)$]

$y \in f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ より

$\exists x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$: $y = f(x)$

$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ より $x \in A_\lambda$

$\therefore$ $y = f(x) \in f(A_\lambda)$ $\blacksquare$