2022/10/04

Ex1.2.1 (3)

∵ [示すこと: (T1), (T2), (T3)]

(T1) [示すこと: $\phi, X \in \mathcal{O}^c$] 明らか. //

(T2) [示すこと: $^\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}^c$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}^c$]

$^\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}^c$ をとる.

[示すこと: $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}^c$]

$$O_1 \cap O_2 = \begin{cases} X & (\text{if } O_1 = O_2 = X) \\ \phi & (\text{others}) \end{cases}$$

なので, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}^c$ //

(T3) [示すこと: $^\forall O_\lambda \in \mathcal{O}^c \ (\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}^c$]

$^\forall O_\lambda \in \mathcal{O}^c \ (\lambda \in \Lambda)$ をとる.

[示すこと: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}^c$]

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = \begin{cases} \phi & (\text{if } ^\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda = \phi) \\ X & (\text{others}) \end{cases}$$

よりOK //

Ex 1.21 (4)

(証) (T1) [示すこと: $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{O}^+$]　明らか //

(T2) [示すこと: ${}^\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}^+$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}^+$]

${}^\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}^+$ をとる.

[示すこと: $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}^+$

i.e. ${}^\exists a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : O_1 \cap O_2 = (a, +\infty)$]

$O_1 \in \mathcal{O}^+$ より ${}^\exists a_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : O_1 = (a_1, +\infty)$

$O_2 \in \mathcal{O}^+$ より ${}^\exists a_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : O_2 = (a_2, +\infty)$

$a := \max\{a_1, a_2\}$ とおく. $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$a_1, a_2 = \pm\infty$ のときは 自然に解釈

[示すこと: $O_1 \cap O_2 = (a, +\infty)$]

a の定め方から $O_1 \cap O_2 = (a, +\infty)$ //

(T3) [示すこと: $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}^+ (\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}^+$]

$\forall O_\lambda \in \mathcal{O}^+ (\lambda \in \Lambda)$ をとる.

[示すこと: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}^+$

i.e., $\exists a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = (a, +\infty)$]

$O_\lambda \in \mathcal{O}^+$ より

$\exists a_\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : O_\lambda = (a_\lambda, +\infty)$

$a := \inf \{ a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \}$ とおくと.

$a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

同じく定義に解釈

[示すこと: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = (a, +\infty)$]

a の定義から

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = (a, +\infty)$$

//

Prop 1.33

$\because$ (i) $\Rightarrow$ (ii) : (i) が成り立つとする.

[示すこと: $\forall x \in A, \exists O$ (xの開近傍) : $O \subset A$]

$\forall x \in A$ をとる.

[示すこと: $\exists O$ (xの開近傍) : $O \subset A$]

$O := A$ とおくと,

(i) より $O \in \mathcal{O}$ なので Oは xの開近傍

[示すこと: $O \subset A$]

$O = A \subset A$ //

(iii) $\Rightarrow$ (i) :　　(iii) が成り立つとする.

[示すこと:　$A \in \mathcal{O}$]

各 $x \in A$ に対し,

(iii) より

$\exists O_x$ (x の開近傍) :　$O_x \subset A$

よって

$$A = \bigcup_{x \in A} O_x \in \mathcal{O}$$

演習　　　　　(T3) より　　　//

$\underline{\underline{\text{Ex}}}$ 1.3.6 (1) $1 \in [0, +\infty)^\circ$

(∵) [示すこと: $\exists O$ (1の開近傍): $O \subset [0, +\infty)$]

$O := (0, +\infty)$ とおくと,

$1 \in O \in \mathcal{O}^+$ より O は 1の開近傍

[示すこと: $O \subset [0, +\infty)$]

$O = (0, +\infty) \subset [0, +\infty)$ //

$\underline{\underline{\text{Ex}}}$ 1.3.6 (2) $1 \notin [0, 2)^\circ$

(∵) [示すこと: $\forall O$ (1の開近傍), $O \not\subset [0, 2)$]

$\forall O$ (1の開近傍) をとる.

[示すこと: $O \not\subset [0, 2)$]

$O \in \mathcal{O}^+$ より $\exists a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$: $O = (a, +\infty)$

$1 \in O$ より $a < 1$.

よって $3 \in O$ なので $O \not\subset [0, 2)$

//

Prop 1.3.7

(1) 演習 //

(2) $O \in \mathcal{O}$, $O \subset A$ とする.

[示すこと: $O \subset A^\circ$ i.e., $\forall x \in O$, $x \in A^\circ$]

$\forall x \in O$ をとる.

[示すこと: $x \in A^\circ$, i.e., $\exists O'$ (xの開近傍): $O' \subset A$]

$O' := O$ とおくと, O' は x の開近傍

(仮定より $O \in \mathcal{O}$)

[示すこと: $O' \subset A$]

$O' = O \subset A$

(∵仮定)

//

(3) [示すこと: $A^\circ \in \mathcal{O}$

i.e., $\forall x \in A^\circ$, $\exists O$ (xの開近傍): $O \subset A^\circ$]

$\forall x \in A^\circ$ をとる.

[示すこと: $\exists O$ (xの開近傍): $O \subset A^\circ$]

$x \in A^\circ$ より

$\exists O$ (xの開近傍): $O \subset A$

[示すこと: $O \subset A^\circ$]

O: 開近傍より $O \in \mathcal{O}$

$O \subset A$ なので (2) より $O \subset A^\circ$ //

Thm 1.3.8 $\quad A \in \mathcal{O} \iff A = A^\circ$

∵ ($\Leftarrow$) $A = A^\circ$ とする.

Prop 1.3.7 (3) より $A = A^\circ \in \mathcal{O}$ //

($\Rightarrow$) $A \in \mathcal{O}$ とする.

[示すこと: $A = A^\circ$ i.e. $A \subset A^\circ$

i.e. $\forall x \in A, \ x \in A^\circ$]

$\forall x \in A$ をとる.

[示すこと: $x \in A^\circ$

i.e. $\exists O$ (xの開近傍): $O \subset A$]

$O := A$ と おけば よい //

Ex. 1.39 (1)

[示すこと: $A^\circ = A$ i.e. $A \in \mathcal{O}^d$]

$\mathcal{O}^d = \mathcal{P}(X)$ より $A \in \mathcal{O}^d$ //

Ex. 1.39 (2)

$X \in \mathcal{O}^c$ より $X^\circ = X$ //

$A \neq X$ とする.

[示すこと: $A^\circ = \phi$]

$A^\circ \neq \phi$ と仮定する.

$A^\circ \in \mathcal{O}^c$ より $A^\circ = X$

$\therefore$ $X = A^\circ \subset A \subsetneq X$ 矛盾 //