2022/10/25

Prop 1.6.2

$\because$ (T1) [示すこと: $\phi \in \mathcal{O}_A$

i.e, $\exists O \in \mathcal{O} : \phi = O \cap A$]

$O := \phi$ とおけばよい //

[示すこと: $A \in \mathcal{O}_A$

i.e, $\exists O \in \mathcal{O} : A = O \cap A$]

$O := A$ とおけばよい //

(T2) [示すこと: $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}_A , \quad O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_A$]

$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}_A$ をとる.

[示すこと: $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_A$

i.e, $\exists O \in \mathcal{O} : \quad O_1 \cap O_2 = O \cap A$]

$O_1 \in \mathcal{O}_A$ より $\exists O_1' \in \mathcal{O} : \quad O_1 = O_1' \cap A$

$O_2 \in \mathcal{O}_A$ より $\exists O_2' \in \mathcal{O} : \quad O_2 = O_2' \cap A$

$O := O_1' \cap O_2'$ とおくと $O \in \mathcal{O}$

[示すこと: $O_1 \cap O_2 = O \cap A$]

$$O_1 \cap O_2 = (O_1' \cap A) \cap (O_2' \cap A)$$

$$= (O_1' \cap O_2') \cap A = O \cap A \quad //$$

(T3) [示すこと: ${}^\forall O_\lambda \in \mathcal{O}_A \ (\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_A$]

${}^\forall O_\lambda \in \mathcal{O}_A \ (\lambda \in \Lambda)$ をとる

[示すこと: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_A$

i.e., ${}^\exists O \in \mathcal{O} : \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = O \cap A$]

$O_\lambda \in \mathcal{O}_A$ より ${}^\exists O_\lambda' \in \mathcal{O} : O_\lambda = O_\lambda' \cap A$

$O := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda'$ とおくと, $O \in \mathcal{O}$

[示すこと: $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda = O \cap A$]

$$O \cap A = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda'\right) \cap A$$

$$= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (O_\lambda' \cap A) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \quad //$$

Ex. 1.6.3

∵ (1) [示すこと: $\exists O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$: $[0,1) = O \cap A$]

$O := (-1,1)$ とおくと. $O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$

[示すこと: $[0,1) = O \cap A$]

$O \cap A = (-1,1) \cap [0,2) = [0,1)$ //

(2) [示すこと: $\exists O \in \mathcal{O}_A$: $0 \in O \subset [0,1)$]

$O := [0,1)$ とおけばよい //

Prop. 1.64

∵ (1) [示すこと: $^\forall O \in \mathcal{O}_Y$, $(f|_A)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$]

$^\forall O \in \mathcal{O}_Y$ をとる.

[示すこと: $(f|_A)^{-1}(O) \in \mathcal{O}_A$

i.e, $^\exists O' \in \mathcal{O}_X$: $(f|_A)^{-1}(O) = O' \cap A$]

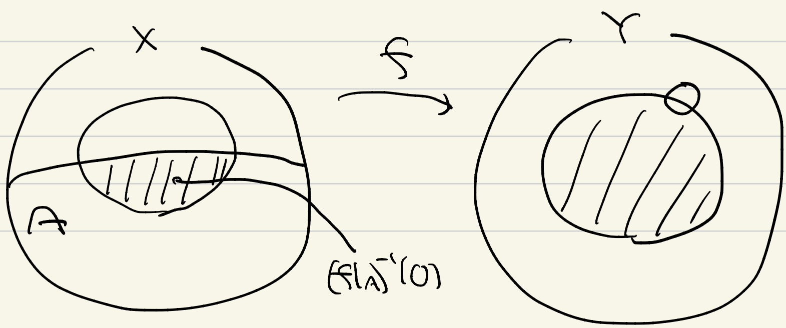
$O' := f^{-1}(O)$ とおく. f : cont より $O' \in \mathcal{O}_X$

[示すこと: $(f|_A)^{-1}(O) = O' \cap A$]

$$
\begin{aligned}
x \in (f|_A)^{-1}(O) &\iff (f|_A)(x) \in O \\
&\iff x \in A \text{ かつ } \underbrace{f(x) \in O}_{\text{i.e. } x \in f^{-1}(O) = O'}
\end{aligned}
$$

より

$$(f|_A)^{-1}(O) = O' \cap A \qquad //$$



(2) 区別のため, $f' : X \to B$ とおく.

[示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}_B$, $(f')^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

$\forall O \in \mathcal{O}_B$ をとる.

[示すこと: $(f')^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

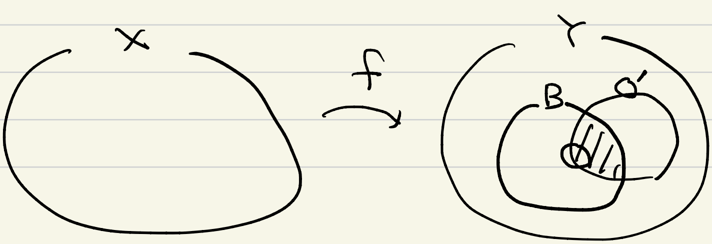
$O \in \mathcal{O}_B$ より $\exists O' \in \mathcal{O}_Y : O = O' \cap B$

すると $(f')^{-1}(O) = f^{-1}(O') \in \mathcal{O}_X$

($\because f$: cont)

//

$$
\begin{aligned}
x \in (f')^{-1}(O) &\iff \underset{\substack{\| \\ f(x)}}{f'(x)} \in O \\
&\iff f(x) \in O = O' \cap B \\
&\iff f(x) \in O' \quad (\because f(x) \in f(X) \subset B) \\
&\iff x \in f^{-1}(O')
\end{aligned}
$$



Cor 1.6.5

[示すこと: (i) bij. (ii) cont (iii) $(f|_A)^{-1}$: cont]

(i) 明らか. //

(ii) $f: X \to Y$: cont なので、

前のProp (1) より $f|_A : A \to Y$: cont

〃 (2) より $f|_A : A \to f(A)$: cont //

(iii) $f^{-1}: Y \to X$: cont なので.

前のProp (1) より $f^{-1}|_{f(A)} : f(A) \to X$: cont

〃 (2) より $\underbrace{f^{-1}|_{f(A)}}_{= (f|_A)^{-1}} : f(A) \to A$: cont //

$$\left(\begin{aligned} & f^{-1}|_{f(A)}(y) = x \\ \Longleftrightarrow\ & f(x) = y,\ x \in A \\ \Longleftrightarrow\ & x = (f|_A)^{-1}(y) \end{aligned} \right)$$

Ex. 1.6.6

(∵) $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$: 同相 より

$$\mathbb{R} \cong (0, +\infty)$$

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$: 同相

より $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cong \mathbb{R}$ //

他同様

Ex 1.6.7

∵ $A := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ とおく.

[示すこと: $\exists f: \mathbb{R} \to A$: 同相]

$f: \mathbb{R} \to A : x \mapsto (x, 0)$ とおく.

[示すこと: f: 同相

ie, (i) bij. (ii) cont (iii) f^{-1}: cont]

(i) 明らか

(ii) $\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto (x, 0)$

は cont で, f はその像を制限したものであるから

(iii) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x$

は cont で, $f^{-1} = g|_A$ より //

Ex. 1.6.8

∵ (1) [示すこと: $\exists O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$: $A = O \cap S^1$]

$$O := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$$

とおく. すると $O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$.

[示すこと: $A = O \cap S^1$]

定め方より $O \cap S^1 = A$ //

(2) $f : (-1, 1) \to A$

$x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2})$

が同相となる //