2022/11/15

Ex 2.1.2

(1) $X := (0,1) \cup [2,3)$ は 非連結

[示すこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$: $\begin{cases} O_1 \cup O_2 = X \\ O_1 \cap O_2 = \emptyset \\ O_1 \neq \emptyset \neq O_2 \end{cases}$]

$O_1 := (0,1)$, $O_2 := [2,3)$ とおく

$O_1 = (0,1) \cap X$, $O_2 = (1,3) \cap X$

より $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$.

[示すこと $O_1 \cup O_2 = X$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$]

明らか //

(2) $\mathbb{Z}$ は 非連結 :

$O_1 := \mathbb{Z}_{<0}$, $O_2 := \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で OK

(3) $\mathbb{Q}$ は 非連結

$O_1 := \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2} \}$
$O_2 := \{ \quad 〃 \quad \mid x > \sqrt{2} \}$ で OK $\blacksquare$

Ex. 2.1.3

∵ (1) $(X, \mathcal{O}^t)$: 非連結と仮定.

すると $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}^t$: $\begin{cases} O_1 \cup O_2 = X & \text{—①} \\ O_1 \cap O_2 = \phi & \text{—②} \\ O_1 \neq \phi \neq O_2 & \text{—③} \end{cases}$

$O_1, O_2 \in \mathcal{O}^t = \{\phi, X\}$ なので、③より

$$O_1 = O_2 = X$$

②より $\phi = O_1 \cap O_2 = X \cap X = X$ 矛盾 //

(2) $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$: 非連結と仮定

すると $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}^t$: $\begin{cases} O_1 \cup O_2 = \mathbb{R} \\ O_1 \cap O_2 = \phi \\ O_1 \neq \phi \neq O_2 \end{cases}$

条件より $O_1, O_2 \notin \{\phi, \mathbb{R}\}$

$\therefore \exists a \in \mathbb{R}$: $O_1 = (a, +\infty)$

O_2 は O_1 の補集合なので

$$O_2 = \mathbb{R} - (a, +\infty) = (-\infty, a] \notin \mathcal{O}^t$$

矛盾 //

Prop 2.14

∵ (i) $\Rightarrow$ (ii):

対偶を示す. (ii) でないと仮定.

[示すこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$: $\begin{cases} O_1 \cup O_2 = X \\ O_1 \cap O_2 = \emptyset \\ O_1 \neq \emptyset \neq O_2 \end{cases}$]

仮定より $\exists a, b \in X \ (a<b)$: $[a,b] \not\subset X$

よって $\exists c \in [a,b]$: $c \notin X$.

$O_1 := (-\infty, c) \cap X$, $O_2 := (c, +\infty) \cap X$

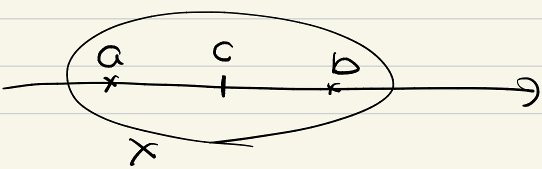
とおくと. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$

[示すこと: $O_1 \cup O_2 = X$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$]

$O_1 \cup O_2 = (\mathbb{R} - \{c\}) \cap X = X$ ($\because c \notin X$)

$O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $a \in O_1$ より $O_1 \neq \emptyset$

$b \in O_2$ より $O_2 \neq \emptyset$



//

(iii) ⇒ (i) :

(iii) を仮定。非連結と仮定すると

$$\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X : \begin{cases} O_1 \cup O_2 = X \\ O_1 \cap O_2 = \phi \\ O_1 \neq \phi \neq O_2 \end{cases}$$

$O_1 \neq \phi \neq O_2$ より

$\exists a \in O_1$, $\exists b \in O_2$

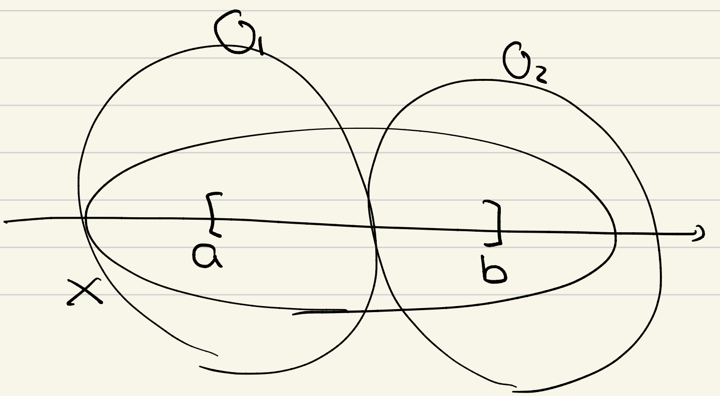
$O_1 \cap O_2 = \phi$ より $a \neq b$

ここで（必要なら入れ替えて） $a < b$ としてよい。

(iii) より $[a, b] \subset X$

...... $c := \sup([a, b] \cap O_1)$ とおく

これから矛盾を示す //



Lem 2.1.6

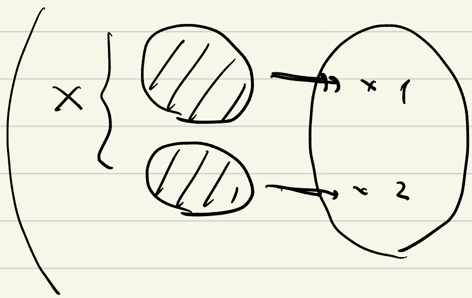
∵ (1) ⇒ (3): 小テスト

(3) ⇒ (2):

$\exists \varphi : X \to \{1, 2\}$: cont, surj. とする.

[示すこと: $\exists A \subset X$: Aは開かつ閉, $\emptyset \neq A \neq X$]

$A := \varphi^{-1}(\{1\})$
とおく.



$\{1\} \subset \{1, 2\}$ 開かつ閉, φ cont

より $A \subset X$ 開かつ閉

[示すこと: $\emptyset \neq A \neq X$]

φ: surj. より

$\exists a, b \in X$: $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = 2$

$a \in A$ より $A \neq \emptyset$

$b \notin A$ より $A \neq X$

//

(2) $\Rightarrow$ (1):

(2)が成り立つとする

[示すこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}$: $O_1 \cup O_2 = X$, $O_1 \cap O_2 = \phi$, $O_1 \neq \phi \neq O_2$]

(2)より $\exists A \subset X$: 開かつ閉, $\phi \neq A \neq X$.

$O_1 := A$, $O_2 := X - A$ とおけばよい $\blacksquare$

Prop 2.1.7

(∵) $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$: cont とする

対偶を示す　$(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$: 非連結 と仮定

[示すこと: $(X, \mathcal{O}_X)$: 非連結

i.e., $\exists \varphi : X \to \{1, 2\}$: cont., surj.]

仮定より

$$\exists \varphi' : f(X) \to \{1, 2\} : \text{cont., surj.}$$

これを使って

$$\varphi := \varphi' \circ f : X \to \{1, 2\}$$ とおく

φ', f : cont より　φ : cont

φ', $f : X \to f(X)$: surj. より　φ : surj.

$\square$

Cor. 2.1.10

∵ f : cont. より

$$f([a.b]) \ : \ 連結$$

$f(a), f(b) \in f([a.b])$, $f(a) < f(b)$ なので、

$$\underset{\substack{\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} \\ m}}{[f(a), f(b)]} \subset f([a.b])$$

像の def より

$$\exists c : [a.b] \ : \ m = f(c) \qquad \square$$