2022 年度 位相数学 II・同演習

田丸 博士 (大阪公立大学)

第 1 章

位相空間の基礎事項

ここでは位相空間論に登場する基本的な用語や概念を紹介する．距離空間を学んだ時と同様に「定義に従って証明する」ことが極めて重要である．証明の書き方は, 多少特殊なやり方を要請するので, 早目に慣れて欲しい.

1.1　位相空間の定義

1.1.1　ユークリッド空間から距離空間へ

位相空間の定義の前に, ユークリッド空間と距離空間の話を振り返る．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から, 距離という概念を抽出したものが距離空間であった．まずは $\mathbb{R}^n$ 上の距離を復習する.

定義 1.1.1. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の 自然な距離 を次で定義する:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

命題 1.1.2. ユークリッド空間 $X := \mathbb{R}^n$ 上の自然な距離は以下を満たす:

(D1) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ かつ "$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$".
(D2) $\forall x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
(D3) $\forall x, y, z \in X$, $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

定義 1.1.3. X を集合, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を写像とする．(X, d) が 距離空間 であるとは, d が命題 1.1.2 の条件 (D1)–(D3) を満たすこと.

従って, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は距離空間である．$\mathbb{R}^n$ に関して定義される概念, 例えば開集合, 閉集合, 連続写像などは, 距離空間に関しても定義できる．従って, $\mathbb{R}^n$ 以外の集合についても, 距離さえ定義されていれば $\mathbb{R}^n$ と同じようなことができるようになる.

1.1.2　距離空間から位相空間へ

この講義で学ぶ位相空間は, 距離空間から開集合という概念を抽出したものである. そこで, 距離空間内の開集合を復習しよう.

定義 1.1.4. (X, d) を距離空間とする. このとき,

(1) $a \in X$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\}$ を ε-近傍 と呼ぶ.
(2) $X \supset O$ が 開集合 とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in O$, $\exists \varepsilon > 0 : U(a; \varepsilon) \subset O$.
(3) $\mathcal{O} := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$ を (X, d) の 開集合族 と呼ぶ.

命題 1.1.5. 距離空間 (X, d) の開集合族 $\mathcal{O}$ に対して, 以下が成り立つ:

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
(T2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
(T3) $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

定義 1.1.6. X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合族とする. $(X, \mathcal{O})$ が 位相空間 であるとは, $\mathcal{O}$ が命題 1.1.5 の条件 (T1)–(T3) を満たすこと.

従って, 距離空間 (X, d) は位相空間である. 距離空間に関して定義される概念は, (全てではないが大部分は) 位相空間に関しても定義できる. すなわち, 何が開集合であるかが指定されていれば, 距離空間と同じようなことができる. このことを紹介するのが, 本講義の目標である.

1.1.3　例題

例 1.1.7. $\mathbb{R}$ に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, 以下が成り立つ:

(1) $(0, +\infty)$ は開集合.
(2) $[0, +\infty)$ は開集合でない.

例 1.1.8. 距離空間 (X, d) の開集合族 $\mathcal{O}$ に対して, 以下が成り立つ:

(T2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

例 1.1.9. $f : X \to Y$ を写像, A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を X 内の部分集合とするとき, 以下が成り立つ: $f(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$.

1.1.4 演習問題

問題 1.1.10 (小テスト 1)**.** 距離空間 (X, d) の開集合族 $\mathcal{O}$ に対して, 次を示せ: $\forall O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

問題 1.1.11. $\mathbb{R}^2$ に自然な距離 d を入れた距離空間に対して, 次を示せ:

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ は開集合;
(2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ は開集合でない.

問題 1.1.12. 距離空間において, 無限個の開集合の共通部分は開集合になるとは限らない. できるだけ簡単な例を挙げよ (共通部分が何になるかを明記すれば, 証明は不要).

問題 1.1.13 (小テスト 2)**.** $f : X \to Y$ を写像, B_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を Y 内の部分集合とするとき, 次を示せ: $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.

問題 1.1.14. 問題 1.1.13 の逆向きの包含を示せ.

問題 1.1.15. $f : X \to Y$ を写像, A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を X 内の部分集合とするとき, 以下が成り立つとは限らない. 反例を挙げよ: $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$.

1.2　位相空間の例

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき, $\mathcal{O}$ を X 上の 位相 と呼ぶ.

1.2.1　位相空間の例

以下は位相空間の典型的な例である. 位相空間に関する新しい概念が登場したときには, まずはこれらの位相の場合にどうなるかを考えると良い.

例 1.2.1. 次は位相である:

(1) 距離空間 (X, d) に対して, その開集合族 $\mathcal{O}_d := \{O \subset X \mid O$ は開集合 $\}$.
(2) 集合 X に対して, その巾集合 $\mathcal{O}^d := \mathfrak{P}(X)$ (これを 離散位相 と呼ぶ).
(3) 集合 X に対して, $\mathcal{O}^t := \{\emptyset, X\}$ (これを 密着位相 と呼ぶ).
(4) $\mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ (これを 右半直線の位相 と呼ぶ).

これらが位相であることの証明は, (1) は距離空間の性質から従う. (2), (3) の証明は容易. (2) は次の命題から示すこともできる.

命題 1.2.2. 離散位相は, 離散距離 d_∞ から決まる位相と一致する. ここで, 集合 X に対して, 次で与えられる d_∞ を離散距離といった:

$$d_\infty(x, y) := \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y). \end{cases}$$

右半直線で定義される $\mathcal{O}^+$ が位相であることを示すためには, 次の便宜的な表記を使うと, 表記が簡単になる.

注意 1.2.3. 右半直線の位相に関して, 便宜的に $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$, $(+\infty, +\infty) := \emptyset$ と定めることがある (ただし, あくまで便宜的な表記であり, $\pm\infty$ という数がある訳ではない). この表記を用いると, 次のように表すことができる:

$$\mathcal{O}^+ = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}.$$

注意 1.2.4. 離散位相は距離から定まるが, 一方で, 密着位相および右半直線の位相は距離から定まる位相ではない. このことは, 後日に証明を与える. 上級者向けの演習問題: どのような考え方で証明すれば良いかを考えよ.

1.2.2 演習問題

問題 1.2.5. (X, d_∞) を離散距離空間とする．このとき X 内の全ての部分集合は開集合であることを示せ.

問題 1.2.6. 二点集合 $X = \{1, 2\}$ 上の位相のうち, 離散でも密着でもないものを作れ.

問題 1.2.7. 三点集合 $X = \{1, 2, 3\}$ に対して, 次は X 上の位相でないことを示せ:

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, X\}.$$

1.3 開集合

ここでは, 位相空間の開集合を定義し, その性質と例を紹介する.

1.3.1 開集合の定義

以下では $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

定義 1.3.1. O $(\subset X)$ が $(X, \mathcal{O})$ 内の <u>開集合</u> とは, 次が成り立つこと: $O \in \mathcal{O}$.

距離空間では, 内点や内部を定義してから開集合を定義していた．位相空間の場合には, 逆に, 開集合を使って内点や内部を定義していく.

定義 1.3.2. $x \in X$, $O \subset X$ とする．このとき, O が x の <u>開近傍</u> であるとは, 次が成り立つこと: $x \in O \in \mathcal{O}$.

命題 1.3.3. $A \subset X$ とする．このとき以下は同値:

(i) $A \in \mathcal{O}$.

(ii) $\forall x \in A$, $\exists O$ (x の開近傍) : $O \subset A$.

距離空間では, ε-近傍を用いて諸概念を定義した．位相空間でも, ε-近傍の代わりに開近傍を用いると, 殆ど同様のことができる.

定義 1.3.4. $A \subset X$ に対して,

(1) x $(\in X)$ が A の <u>内点</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists O$ (x の開近傍) : $O \subset A$.

(2) $A^\circ := \{x \in X \mid x$ は A の内点 $\}$ を A の <u>内部</u> と呼ぶ.

注意 1.3.5. x $(\in X)$ が A の内点であるための条件は, 次と同値: $\exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A$.

距離空間の場合には, 距離に関する内点と距離から定める位相に関する内点は, 当然ながら一致する (演習問題を参照). また, 位相を取り換えると, 内点や内部も変わる.

例 1.3.6. $\mathbb{R}$ に右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を入れた位相空間について, 以下が成り立つ:

(1) $1 \in [0, +\infty)^\circ$.

(2) $1 \notin [0, 2)^\circ$.

命題 1.3.7. $A \subset X$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $O \in \mathcal{O}, O \subset A \Rightarrow O \subset A^\circ$.

(3) $A^\circ \in \mathcal{O}$.

上の命題の (3) の証明には, (2) の結果と命題 1.3.3 を用いる.

定理 1.3.8. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $A \in \mathcal{O} \Leftrightarrow A = A^\circ$.

例 1.3.9. X を集合とし, $A \subset X$ とすると, 以下が成り立つ:

(1) 離散位相 $\mathcal{O}^d$ に関して, $A^\circ = A$.

(2) 密着位相 $\mathcal{O}^t$ に関して, $X^\circ = X$. 一方, $A \neq X$ なら $A^\circ = \emptyset$.

1.3.2　演習問題

問題 1.3.10. $A \subset X$ とし, 各 $x \in A$ に対し $x \in O_x \subset A$ が成り立つとき, 以下を示せ:

(1) $A \subset \bigcup_{x \in A} O_x$.　　(2) $A \supset \bigcup_{x \in A} O_x$.

問題 1.3.11. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とするとき, 次を示せ: $A^\circ \subset A$.

問題 1.3.12 (小テスト 3)**.** (X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離から定まる位相とする. このとき, $x \in X$ および $A \subset X$ について, “(i) $\Rightarrow$ (ii)” を示せ:

(i) 位相 $\mathcal{O}_d$ に関して, x は A の内点.

(ii) 距離 d に関して, x は A の内点, すなわち次が成り立つ: $\exists \varepsilon > 0 : U(x; \varepsilon) \subset A$.

問題 1.3.13. 上の問題の “(ii) $\Rightarrow$ (i)” を示せ.

問題 1.3.14. $\mathbb{R}$ に右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を入れた位相空間において, 次の集合の内部が何になるかを予想し, それを示せ:

(1) $[0, +\infty)$.　　(2) $[0, 2)$.　　(3) $\mathbb{R} - \{0\}$.

1.4　閉集合

引き続き, 以下でも $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. また, $X - A$ によって X における A の補集合を表す. 補集合を表す記号は $X \setminus A$, あるいは全体集合 X を明示する必要がない場合は A^c を使うこともある.

1.4.1　閉集合の定義

定義 1.4.1. A $(\subset X)$ が $(X, \mathcal{O})$ 内の 閉集合 とは, 次が成り立つこと: $X - A \in \mathcal{O}$.

例 1.4.2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 内の閉集合に関して,

(1) (X, d) を距離空間, $A \subset X$ とする. このとき A が距離空間内の閉集合であることと, A が距離から決まる位相 $\mathcal{O}_d$ に関して閉集合であることは同値.

(2) $\mathcal{O} = \mathcal{O}^d$ (離散位相) のとき, 全ての部分集合は閉集合.

(3) $\mathcal{O} = \mathcal{O}^t$ (密着位相) のとき, 閉集合は $\emptyset$, X のみ.

(4) $(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ (右半直線の位相) のとき, A $(\subset \mathbb{R})$ が閉集合であるための必要十分条件は, $\exists a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : A = (-\infty, a]$.

命題 1.4.3. $(X, \mathcal{O})$ 内の閉集合全体の成す集合族を $\mathcal{A}$ と表すと, 以下が成り立つ:

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

(A2) $\forall A_\lambda \in \mathcal{A}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{A}$.

(A3) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

位相空間は開集合系を指定することで定義されたが, 条件 (A1)–(A3) をみたすものを閉集合系と定義して, そこから話を始める場合もある.

1.4.2　触点と閉包

定義 1.4.4. $A \subset X$ に対して,

(1) x $(\in X)$ が A の 触点 とは, 次が成り立つこと: $\forall O$ (x の開近傍), $A \cap O \neq \emptyset$.

(2) $\overline{A} := \{x \in X \mid x$ は A の触点 $\}$ を A の 閉包 と呼ぶ.

例 1.4.5. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ (右半直線の位相) について, 以下が成り立つ:

(1) $1 \in \overline{[0, 1)}$.

(2) $2 \notin \overline{[0, 1)}$.

(3) $-1 \in \overline{[0, +\infty)}$.

次は閉包の一般的な性質．証明は演習問題とする．

命題 1.4.6. $A \subset X$ に対し, $A \subset \overline{A}$.

例 1.4.7. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ および $A \subset X$ について,

(1) $\mathcal{O} = \mathcal{O}^d$ (離散位相) のとき, $\overline{A} = A$.

(2) $\mathcal{O} = \mathcal{O}^t$ (密着位相) のとき, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, また $A \neq \emptyset$ ならば $\overline{A} = X$.

命題 1.4.8. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: $X - \overline{A} = (X - A)^\circ$.

上の命題により, 閉包に関する性質を内部に関する性質に翻訳することができる．これを用いて, 次が示される．

定理 1.4.9. $A \subset X$ に対して, 次が成り立つ: A が閉集合 $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

1.4.3　演習問題

問題 1.4.10. (X, d) を距離空間とし, $\mathcal{O}_d$ を距離から定まる位相とする．このとき, $x \in X$ および $A \subset X$ について, 次を示せ:

(1) x が $\mathcal{O}_d$ に関して A の触点ならば, d に関しても A の触点であることを示せ．

(2) (1) の逆を示せ．

問題 1.4.11. $A \subset X$ とする．

(1) $A \subset \overline{A}$ を定義に従って示せ．

(2) $A \subset \overline{A}$ を内部の性質に帰着させて示せ．

問題 1.4.12 (自習問題)**.** $\mathbb{R}$ に関して, 自然な距離から定まる位相 $\mathcal{O}$, 離散位相 $\mathcal{O}^d$, 密着位相 $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を考える．これらの位相に関して, $\overline{\{0\}}$ および $\overline{[0,2)}$ が何になるかを予想し, それらを示せ．

問題 1.4.13 (小テスト 4)**.** $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ (右半直線の位相) に関して, $\overline{\{0\}}$ が何になるかを予想し,「予想した集合 $\subset \overline{\{0\}}$」を示せ．

問題 1.4.14 (発展)**.** 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において, 閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である．この主張を正確に述べ, それを示せ．

1.5　連続写像と同相

以下では $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間とする．写像を, 定義域と値域に入っている位相を強調して $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ のように表すことが多い.

1.5.1　連続写像の定義

定義 1.5.1. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が <u>連続</u> とは, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

従って, 距離空間から距離空間への写像が連続であるための必要十分条件は, 距離から定まる位相に関して連続であることである．すなわち, 位相空間における連続写像の概念は, 距離空間における連続写像の一般化になっている.

例 1.5.2. $\mathbb{R}$ の密着位相を $\mathcal{O}^t$, 離散位相を $\mathcal{O}^d$ で表す．恒等写像 id に関して,

(1) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t)$ は連続,

(2) $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^t) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^d)$ は連続でない.

1.5.2　連続写像の性質

連続写像の性質をいくつか紹介する．最初に紹介する性質を標語的に述べると, 連続写像と連続写像の合成は連続である.

命題 1.5.3. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, $g : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ を連続写像とする．このとき, 合成写像 $g \circ f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ も連続.

次の性質を示すための準備として, 逆像と補集合の関係を復習しておく.

補題 1.5.4. 写像 $f : X \to Y$ および $V \subset Y$ に対し, $X - f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - V)$.

次に紹介する性質は, 連続を閉集合の言葉で述べるものである．X の閉集合系 (閉集合全体の成す集合族) を $\mathcal{A}_X$ で表す.

命題 1.5.5. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall A \in \mathcal{A}_Y$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_X$.

1.5.3　同相

数学では, 対象となるものが同じとはどういうことかを明示することは, 定石である (例えば三角形の合同や相似, ベクトル空間の線型同型, 群の同型など). ここで紹介するのは, 位相空間の同型である. これを位相同型あるいは同相と呼ぶ.

定義 1.5.6. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が 同相写像 とは, 次が成り立つこと:

(i) f は全単射,
(ii) f は連続,
(iii) f^{-1} は連続.

写像が全単射かつ連続だとしても, 逆写像も連続になるとは限らない. 反例は, 例えば例 1.5.2 を参照.

定義 1.5.7. $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が 同相 とは, 次が成り立つこと: $\exists f : X \to Y$: 同相写像.

命題 1.5.8. 同相を $\cong$ で表す. このとき $\cong$ は同値関係である. すなわち,

(1) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
(2) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y) \Rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
(3) $(X, \mathcal{O}_X) \cong (Y, \mathcal{O}_Y), (Y, \mathcal{O}_Y) \cong (Z, \mathcal{O}_Z) \Rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \cong (Z, \mathcal{O}_Z)$.

位相空間論において, “2 つの位相空間が同相かどうかを判定せよ” という問題は基本的である. 特に, 同相でないことを示す際に, 定義通りに行うことは (全ての写像を考えなくてはならないので) 一般には極めて難しい. そこで, 次回以降に紹介する “位相空間の性質” が重要になる.

注意 1.5.9 (余談)**.** “位相空間の性質” が指すものの説明の前振りとして, 次の問題を考える. できれば証明を一言で延べよ.

(1) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ が線型同型でないことを示せ.
(2) 次の 2 つの行列が共役でない ($Y = gXg^{-1}$ の形で表せない) ことを示せ:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

1.5.4　演習問題

問題 1.5.10 (小テスト 5)**.** 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に関して, 任意の閉集合の逆像が閉集合であると仮定する. このとき f は連続であることを示せ.

問題 1.5.11. 定値写像 (像が一点になる写像) は常に連続である. このことを正確に述べ, それを示せ.

問題 1.5.12. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を考える.

(1) $\mathcal{O}_X$ が離散位相のとき, f は連続であることを示せ.
(2) $\mathcal{O}_Y$ が密着位相のとき, f は連続であることを示せ.

問題 1.5.13. 以下で定義される写像 $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ が連続であるかどうかを予想し, それを示せ. ただし $\mathcal{O}^+$ は右半直線の位相である.

(1) $f(x) = -x$.
(2) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$.

問題 1.5.14. $\#X > 1$ とする (すなわち X には元が 2 個以上あるとする). このとき, X に密着位相を入れた空間と離散位相を入れた空間は同相でないことを示せ.

1.6　相対位相

ここで述べる内容は, 位相空間の「基礎」よりは「構成」に関するものだが, 様々な例を調べる際に重要なので, 先に紹介する. 以下, $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

1.6.1　相対位相の定義

位相空間内の部分集合に位相を定義する.

定義 1.6.1. $A \subset X$ に対し, 次の $\mathcal{O}_A$ を $(X, \mathcal{O})$ から決まる A の 相対位相 と呼ぶ:

$$\mathcal{O}_A := \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

定義より次が成り立つ: “$W \in \mathcal{O}_A \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O} : W = O \cap A$”.

命題 1.6.2. 相対位相 $\mathcal{O}_A$ は A の位相である.

例 1.6.3. $A := [0, 2)$ とし, $\mathcal{O}_A$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相とする. 位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $[0, 1) \in \mathcal{O}_A$.
(2) $0 \in [0, 1)^\circ$.

1.6.2　相対位相と連続写像

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. ここでは連続写像と相対位相の関係を調べる.

命題 1.6.4. 連続写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) $A \subset X$ とし, $\mathcal{O}_A$ を相対位相とする. このとき, 制限写像 $f|_A : (A, \mathcal{O}_A) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ は連続.
(2) $B \subset Y$ とし, $\mathcal{O}_B$ を相対位相とする. このとき, もし $f(X) \subset B$ ならば, 値域を制限した写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (B, \mathcal{O}_B)$ は連続.

系 1.6.5. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を同相写像とし, $A \subset X$ とする. このとき, $f|_A : A \to f(A)$ も同相写像である. ただしここで, A にも $f(A)$ にも相対位相が入っているものとする.

例 1.6.6. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ 上の標準的な位相とし, $\mathbb{R}$ 内の部分集合にはこれから決まる相対位相を入れる. このとき, 任意の開区間 (a, b), 半直線 $(c, +\infty)$, および $\mathbb{R}$ は全て同相.

1.6.3　相対位相の例

例 1.6.7. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ 内の x 軸は同相. ただし $\mathbb{R}$ には標準的な位相を入れ, x 軸には $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れる.

ここで, n 次元球面を次で定義し, $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れる:

$$S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

例 1.6.8. 半円 $A := \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}$ について以下が成り立つ:

(1) A は S^1 内の開集合.

(2) A と開区間 $(-1, 1)$ は同相.

1.6.4　演習問題

問題 1.6.9. $A := [0, 2)$ とし, $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ から決まる相対位相を考える. この位相に関して,

(1) $[0, 1)$ の内部が何になるかを予想し, それを示せ.

(2) $[0, 1)$ の閉包が何になるかを予想し, それを示せ.

(3) $(1, 2)$ の内部が何になるかを予想し, それを示せ.

(4) $(1, 2)$ の閉包が何になるかを予想し, それを示せ.

問題 1.6.10. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる $\mathbb{Z}$ の相対位相は, 離散位相であることを示せ. (ヒント: 一点集合について調べれば十分.)

問題 1.6.11. $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対して, $\mathbb{R}^3$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れる.

(1) $A := \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$ (これを北半球という) は S^2 内の開集合であることを示せ. ($\mathbb{R}^3$ 内の開集合は既知として良い.)

(2) 北半球と開球 $B^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ は同相であることを示せ. ただし B^2 には $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れる.

第 2 章

位相空間の性質

位相空間に対して「同相で保たれる」ような性質を, 位相的性質という. ここで同相で保たれるとは, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相で, $(X, \mathcal{O}_X)$ がある性質をもつならば, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ も同じ性質をもつ, というものである. この章では, 位相的性質をいくつか紹介する.

2.1 連結性

連結性とは, 位相空間が「分けられる・分けられない」という概念を定式化したものである.

2.1.1 連結性の定義と例

定義 2.1.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が <u>非連結</u> とは, 次が成り立つこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : O_1 \cup O_2 = X$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が <u>連結</u> とは, 非連結でないこと.

例 2.1.2. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $(0, 1) \cup [2, 3)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ は非連結.

非連結であることを示すのは比較的容易だが, 連結であることを示すことは難しいことが多い. 次の例は, 特殊な位相なので連結性の証明が容易なもの.

例 2.1.3. 以下の位相空間は連結:

(1) 密着位相を入れた空間.

(2) 右半直線の位相を入れた空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$.

2.1.2 実数と連結性

$\mathbb{R}$ 内の部分集合が, 標準的な位相から決まる相対位相に関して連結かどうかを調べる. 以下の議論では, 実数の連結性が本質的に効いている.

命題 2.1.4. $X \subset \mathbb{R}$ とし, $\mathcal{O}_X$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる X の相対位相とする. このとき以下は同値:

(i) $(X, \mathcal{O}_X)$ は連結.

(ii) $\forall a, b \in X \ (a < b)$, $[a, b] \subset X$.

この命題は $\mathbb{Q}$ では成立しないので, $\mathbb{R}$ に特有の性質を使う必要がある. (i) $\Rightarrow$ (ii) は, 対偶を示せば比較的容易. (ii) $\Rightarrow$ (i) は, 教科書 p.112 に証明があるので, 概略を紹介する.

例 2.1.5. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $\mathbb{R}$, $(a, +\infty)$, $[a, b]$, $[a, b)$, $\ldots$ は連結.

2.1.3 連結の同相不変性

連結性は位相空間の性質であることを示す. すなわち, 位相空間が連結であるという性質は, 同相で保たれる.

補題 2.1.6. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 以下は互いに同値:

(1) $(X, \mathcal{O})$ は非連結.

(2) $\exists A \subset X$: A は開かつ閉, $\emptyset \neq A \neq X$.

(3) $\exists \varphi : X \to \{1, 2\}$: 連続かつ全射.

ここで $\{1, 2\}$ には, $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相が入っているものとする. ちなみに, この位相は離散位相に一致する.

命題 2.1.7. 連結な位相空間の連続写像による像は連結である. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $(X, \mathcal{O}_X)$ を連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は連結.

この命題の証明は, 補題 2.1.6 (3) の条件を用いると簡潔に書ける. また, この命題を用いると次が示される.

定理 2.1.8. 連結性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は連結.

例 2.1.9. $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相に関して, $[0,1)$ と $(0,1)$ は同相でない.

2.1.4 連結性の応用

命題 2.1.7 を用いると, 中間値の定理に極めて簡潔な証明を与えることができる.

系 2.1.10 (中間値の定理)**.** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続写像とし, $f(a) < m < f(b)$ とする. このとき次が成り立つ: $\exists c \in [a,b] : m = f(c)$.

2.1.5 演習問題

問題 2.1.11 (小テスト 6)**.** $(X, \mathcal{O})$ は非連結のとき, 次を示せ: $\exists \varphi : X \to \{1,2\}$: 連続かつ全射.

問題 2.1.12. $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ から決まる相対位相に関して, $\mathbb{Z}$ が連結であるかどうかを予想し, それを示せ.

問題 2.1.13. $X := \{1,2\}$ とおく. $\mathbb{R}$ 上の標準的な位相 $\mathcal{O}$ から決まる X の相対位相は離散位相と一致することを示せ.

問題 2.1.14. 円周 S^1 が連結であることを示せ.

問題 2.1.15. $M(2,\mathbb{R})$ を 2×2 実行列全体の集合とし, 自然な $\mathbb{R}^4$ との同一視によって標準的な位相を入れる. このとき次は相対位相に関して非連結であることを示せ:

$$\mathrm{O}(2) := \{g \in M(2,\mathbb{R}) \mid {}^t g g = I_2\}.$$

問題 2.1.16. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とする. 以下が正しい場合には示し, 正しくない場合には反例を挙げよ. ただし X 内の部分集合には全て相対位相を入れる.

(1) A が連結ならば閉包 $\overline{A}$ も連結.

(2) A が連結ならば内部 A° も連結.

2.2　弧状連結性

位相空間が連結であるとは, 直感的には「分けられない」ことであった. ここで扱う弧状連結性は「つながっている」ことを表す概念である.

2.2.1　弧状連結の定義

定義 2.2.1. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が 弧状連結 であるとは, 次が成り立つこと: $\forall x_0, x_1 \in X$, $\exists c : [0,1] \to X$: 連続, $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.

ここで $[0,1]$ には標準的な位相を入れる. 上の条件を満たす c を, x_0 と x_1 を結ぶ 道 と呼ぶ. すなわち弧状連結とは, 任意の 2 点が道で結べる (道で繋がっている) こと.

例 2.2.2. 標準的な位相に関して, 以下が成り立つ:

(1) $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ の区間, 円周 S^1, $\mathbb{R}^n - \{0\}$ (ただし $n \geq 2$) は弧状連結.

(2) $\mathbb{R} - \{0\}$ は弧状連結でない.

ちなみに, 道の定義域は定義域は閉区間であれば何でも良い.

補題 2.2.3. 閉区間 $[a, b]$ を考える. $(X, \mathcal{O})$ が弧状連結であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall x_0, x_1 \in X$, $\exists c : [a,b] \to X$: 連続, $c(a) = x_0$, $c(b) = x_1$.

命題 2.2.4. $(X, \mathcal{O})$ 内の点 x_0, x_1 が道で結べるときに $x_0 \sim x_1$ と書く. このとき $\sim$ は同値関係. すなわち, $\forall x_0, x_1, x_2 \in X$ に対して以下が成立:

(1) $x_0 \sim x_0$,

(2) $x_0 \sim x_1$ ならば $x_1 \sim x_0$,

(3) $x_0 \sim x_1$, $x_1 \sim x_2$ ならば $x_0 \sim x_2$.

2.2.2　弧状連結と連結

命題 2.2.5. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ は, 弧状連結ならば連結である.

証明は背理法で行う. 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結かつ非連結と仮定すると, 閉区間 $[0,1]$ が連結であることに矛盾する. なお, この命題の逆は成り立たない. 反例を記述するための記号として, $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して次のように表す:

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

例 2.2.6. $\mathbb{R}^2$ 内の以下の部分集合は, 標準的な位相に関して連結だが弧状連結ではない:

(1) $((0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times (0,1]) \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(x, 1/n) \mid 0 \leq x \leq 1\})$.
(2) $(\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$.

2.2.3　弧状連結の性質

位相空間が弧状連結であるという性質は, 同相で保たれることを示す.

命題 2.2.7. 弧状連結な空間の連続写像による像は弧状連結である. すなわち, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続, $(X, \mathcal{O}_X)$ を弧状連結とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ は弧状連結.

定理 2.2.8. 弧状連結性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結のとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は弧状連結.

例 2.2.9. 直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ は, 標準的な位相に関して同相ではない.

例 2.2.10 (余談)**.** メビウスの帯は, 帯の方向に沿った線で切っても弧状連結.

2.2.4　演習問題

問題 2.2.11. $(X, \mathcal{O})$ 内の 2 点 $x, y \in X$ に対して, x と y を結ぶ道が存在しているとする. このとき, y と x を結ぶ道も存在することを示せ.

問題 2.2.12 (小テスト 7)**.** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続な全射とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結であるとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ も弧状連結であることを示せ.

問題 2.2.13. $(X, \mathcal{O})$ に対し, $a \in X$ を固定する. このとき「$\forall x \in X$, $a \sim x$ (道で結べる)」ならば $(X, \mathcal{O})$ は弧状連結であることを示せ (プリントにある命題は使って良い).

問題 2.2.14. 以下が弧状連結かどうかを予想し, それを示せ:

(1) 密着位相を入れた空間 $(X, \mathcal{O}^t)$.
(2) 右半直線の位相 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$.
(3) $X := \{0, 1\}$ に $\mathcal{O}^+$ から決まる相対位相を入れたもの.

2.3　コンパクト性

コンパクト性は, 位相空間がある意味で「小さい」ことを定式化したものである. 以下では, $X \subset \mathbb{R}$ に対して, $\mathbb{R}$ の標準的な位相から決まる相対位相を X の標準的な位相という.

2.3.1　コンパクトの定義

定義 2.3.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. このとき $\mathfrak{U}$ が X の 開被覆 (**open cover**) とは, 以下が成り立つこと:

(i) $\mathfrak{U} \subset \mathcal{O}$.
(ii) $X = \bigcup \mathfrak{U}$.

ここで, $\mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ としたとき, $\bigcup \mathfrak{U}$ は次で定義される: $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

例 2.3.2. $X := [0, 1]$ とし, $\mathcal{O}$ を X の標準的な位相とする. このとき, 以下は $(X, \mathcal{O})$ の開被覆:

(1) $\{[0, 2/3), (1/3, 1]\}$.
(2) $\{[0, 1/2)\} \cup \{(1/n, 1] \mid n \geq 2\}$.
(3) $\{X\}$.
(4) $\{\emptyset, X\}$.

このように, 開被覆は一つとは限らないし, 有限でも無限でも良い. また, 無駄があっても良い.

定義 2.3.3. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が コンパクト であるとは, 次が成り立つこと: $\forall \mathfrak{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: 開被覆, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $X = \bigcup U_{\lambda_i}$.

コンパクト性の定義は次のように言い換えることができる: $\forall \mathfrak{U}$: 開被覆, $\exists \mathfrak{U}' \subset \mathfrak{U}$ ($\mathfrak{U}'$ は有限) s.t. $X = \bigcup \mathfrak{U}'$.

2.3.2　コンパクトの例

コンパクト位相空間の例とそうでない例を挙げる. 一般に, 与えられた位相空間がコンパクトであることを定義に従って示すことは, 容易ではない.

命題 2.3.4 (復習)**.** $X \subset \mathbb{R}^n$ とし, $\mathcal{O}_X$ を標準的な位相とする. このとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有界閉集合であること.

例 2.3.5. $(0, 2]$ に標準的な位相を入れた位相空間は, コンパクトでない.

命題 2.3.6. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト位相空間とし, A を X の閉集合とする. このとき, A は相対位相に関してコンパクトである.

2.3.3 コンパクトの同相不変性

コンパクト性は位相空間の性質であることを示す. すなわち, 位相空間がコンパクトであるという性質は, 同相で保たれる.

命題 2.3.7. コンパクト位相空間の連続写像による像はコンパクトである. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクト位相空間, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とすると, $(f(X), \mathcal{O}_{f(X)})$ はコンパクトである.

定理 2.3.8. コンパクト性は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相, $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトのとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ はコンパクト.

系 2.3.9. 直線 $\mathbb{R}$ と円周 S^1 は同相ではない.

系 2.3.10. $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであるとし, $f : X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. このとき f は最大値と最小値を持つ.

2.3.4 演習問題

問題 2.3.11 (小テスト 8)**.** $X = \{1, 2, 3\}$ が離散位相 $\mathcal{O}^d$ に関してコンパクトであることを, 定義に従って示せ.

問題 2.3.12. X が有限集合のとき, 任意の位相に関して $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであることを定義に従って示せ.

問題 2.3.13. $\mathcal{O}^d$ を X の離散位相とし, $(X, \mathcal{O}^d)$ がコンパクトであるとする. このとき, X が有限集合であることを示せ.

問題 2.3.14. $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相を $\mathcal{O}^+$ とする. 以下の集合に $\mathcal{O}^+$ から決まる相対位相を入れたとき, コンパクトであるかどうかを予想し, それを示せ:

(1) $(0, +\infty)$,

(2) $[0, +\infty)$.

2.3.5　中間試験事前レポートについて

中間試験は 2022/12/20 の授業時間に行う．試験範囲は ~~コンパクト~~ 弧状連結 まで．それに伴い, 希望者は以下の課題を事前レポートとして提出しても良い．

問題 2.3.15 (事前レポート問題)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する中間試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け:

(1) 開集合・閉集合.

(2) 連続写像.

(3) 相対位相.

(4) 連結・弧状連結.

(5) ~~コンパクト.~~

ただし, レポートの一枚目に全ての予想問題を書き, 二枚目以降にそれらの解答を書くこと．表紙は付けてはいけない．提出締切は 12/13 の授業時間.

2.4 中間試験

注意

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語など

- $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相とは $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$.
- $A \subset X$ のとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ から決まる相対位相とは, $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}_X\}$.
- 内部とは, $A^\circ := \{x \in X \mid \exists O \in \mathcal{O} : x \in O \subset A\}$.
- 閉包とは, $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall O \in \mathcal{O}\,(x \in O),\ O \cap A \neq \emptyset\}$.
- 写像が連続とは, 任意の開集合の逆像が開集合になること.
- 非連結とは, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$: $X = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$.
- x_0 と x_1 を結ぶ道とは, $c : [0,1] \to X$: 連続, $c(0) = x_0$, $c(1) = x_1$.

問題

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 以下のそれぞれの主張の真偽を予想し, それを定義に従って示せ (あるいは反例を挙げよ).

[1] $X := (0, 2]$ とし, $\mathcal{O}_X$ を右半直線の位相 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ から決まる相対位相とする. このとき $(X, \mathcal{O}_X)$ において $[1, 2]^\circ = (1, 2)$. (20 点)

[2] 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ および $A, B \subset X$ の閉包に対して,
(1) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. (20 点)
(2) $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$. (20 点)

[3] $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像, $A \subset X$ とし, $\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}_X$ から決まる A 上の相対位相とすると, f の A への制限写像は連続. (20 点)

[4] 連続な全射 $\varphi : (X, \mathcal{O}_X) \to \{1, 2\}$ が存在するとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ は非連結. (20 点)

[5] 右半直線の位相 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ に関して, 2 と 1 を結ぶ道が存在する. (20 点)

[6] (中間アンケート) 講義および演習に関する意見・コメント・要望等がありましたら, 答案に書いて下さい.

2.5　分離公理

以下, $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, その閉集合系を $\mathcal{A}$ で表す. ここで述べる性質は, 位相空間に「開集合が豊富にあるかどうか」を表すものだと考えられる.

2.5.1　分離公理の定義

位相空間に対して, 「何かと何かが開集合で分離できる」というタイプの性質を考える. ここでは, そのような性質のうち典型的なものを二つ紹介する.

定義 2.5.1. $(X, \mathcal{O})$ に対して, 以下を **(T_1)-分離公理** および **(T_2)-分離公理** と呼ぶ:

(T_1) $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2), \exists O \in \mathcal{O} : x_1 \in O,\, x_2 \notin O.$

(T_2) $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2), \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x_1 \in O_1,\, x_2 \in O_2,\, O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

(T_1)-分離公理をみたす空間を **(T_1)-空間**, また (T_2)-分離公理をみたす空間を **(T_2)-空間** あるいは **ハウスドルフ空間** という. ハウスドルフ空間の定義をざっくり言うと, 「二点が開集合で分けられる」.

命題 2.5.2. 以下が成り立つ:

(1) 距離空間はハウスドルフ空間である. すなわち, (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}_d$ を距離から決まる位相とすると, $(X, \mathcal{O}_d)$ はハウスドルフ空間.

(2) ハウスドルフ空間は (T_1) である.

(3) $(X, \mathcal{O})$ が (T_1) 空間であるための必要十分条件は, 任意の一点集合が閉集合となること, すなわち次が成り立つこと: $\forall x \in X,\, \{x\} \in \mathcal{A}$.

例 2.5.3. $\mathbb{R}$ に対して以下が成り立つ:

(1) 標準的な位相 $\mathcal{O}$, 離散位相 $\mathcal{O}^d$ は, (T_1) かつハウスドルフである.

(2) 密着位相 $\mathcal{O}^t$, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ は, (T_1) でもハウスドルフでもない.

2.5.2　分離公理の同相不変性

ここでは, 分離公理が同相で不変であることを示す.

命題 2.5.4. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続な単射とする. このとき以下が成り立つ:

(1) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が (T_1) 空間ならば, $(X, \mathcal{O}_X)$ も (T_1) 空間である.

(2) $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフならば, $(X, \mathcal{O}_X)$ もハウスドルフである.

この命題から, 上で紹介した分離公理が同相で不変なことが直ちに従う.

定理 2.5.5. (T_1) やハウスドルフという性質は同相で不変である. すなわち, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が同相とすると以下が成り立つ:

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ が (T_1) のとき $(Y, \mathcal{O}_Y)$ も (T_1) である.
(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ が (T_2) のとき $(Y, \mathcal{O}_Y)$ も (T_2) である.

系 2.5.6. $\mathbb{R}$ 上の密着位相 $\mathcal{O}^t$ および右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ は, 距離から決まる位相と同相ではない.

2.5.3　ハウスドルフ空間の性質

位相空間にハウスドルフ性を仮定すると, いくつかの良い性質をもつことが知られている. ここでは, そのうち代表的なものを紹介する.

命題 2.5.7. $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間, $A \subset X$ とし, $\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}$ から決まる相対位相とする. このとき, $(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクトならば, A は X 内の閉集合である.

命題 2.5.8. $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を全単射な連続写像とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクト, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフであるとすると, f は同相写像である.

命題 2.5.8 を示すためには, f が閉写像であることを示せば良い (次の問題を参照). 写像 f が閉写像であることの証明には, 命題 2.5.7 を用いる.

問題 2.5.9 (自習問題)**.** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を全単射な連続写像とする. このとき以下が同値であることを示せ:

(1) f は同相写像.
(2) f は開写像 (すなわち, $\forall O \in \mathcal{O}_X,\ f(O) \in \mathcal{O}_Y$).
(3) f は閉写像 (すなわち, $\forall C \in \mathcal{A}_X,\ f(C) \in \mathcal{A}_Y$).

2.5.4　その他の分離公理

分離公理は実は無数に考えられるが, (T_1), (T_2) の次に代表的なものを紹介する.

定義 2.5.10. $(X, \mathcal{O})$ に対して, 以下を **(T_3)-分離公理** および **(T_4)-分離公理** と呼ぶ:

(T_3) $\forall F \in \mathcal{A}, \forall x \notin F, \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : x \in O_1,\ F \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
(T_4) $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{A}\ (F_1 \cap F_2 = \emptyset), \exists O_1, O_2 \in \mathcal{O} : F_1 \subset O_1,\ F \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

ハウスドルフ空間は「二点が分けられる」だったが, 上の条件は「点と閉集合が分けられる」というものと「閉集合と閉集合が分けられる」というものである.

定義 2.5.11. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して,

(1) $(X, \mathcal{O})$ が <u>正則空間</u> であるとは, (T_1) と (T_3) を満たすこと.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が <u>正規空間</u> であるとは, (T_1) と (T_4) を満たすこと.

命題 2.5.12. 位相空間に対して, 次が成立: 正規 $\Rightarrow$ 正則 $\Rightarrow$ ハウスドルフ $\Rightarrow$ (T_1).

2.6 演習問題

問題 2.6.1 (小テスト 9)**.** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続な単射とする. このとき, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ がハウスドルフならば $(X, \mathcal{O}_X)$ もハウスドルフであることを示せ.

問題 2.6.2. (T_1) 空間内の任意の一点集合は閉集合であることを示せ.

問題 2.6.3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とし, 相対位相に関して $(A, \mathcal{O}_A)$ がコンパクトであると仮定しても, A は X 内の閉集合とは限らない. 反例を挙げよ.

問題 2.6.4. $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間, $A \subset X$ とする. このとき, 相対位相に関して $(A, \mathcal{O}_A)$ もハウスドルフであることを示せ.

問題 2.6.5. X を無限集合とし, $\mathcal{O} := \{O \subset X \mid \#(X - O) < \infty\} \cup \{\emptyset, X\}$ とおく.

(1) (自習用) $\mathcal{O}$ が位相であることを示せ.

(2) $(X, \mathcal{O})$ が (T_1) であることを示せ.

(3) $(X, \mathcal{O})$ がハウスドルフでないことを示せ.

第 3 章

位相空間の構成法

ここでは, 既知の位相空間から新しい位相空間を構成する方法をいくつか紹介する. また, 元の位相空間とそこから構成された位相空間の間の性質の関係についても調べる.

3.1 開基

距離空間において, ε-近傍があれば, 全ての開集合を復元することができる. 開基とは, それが分かっていれば全ての開集合を復元できるような「開集合のモト」である.

3.1.1 開基条件

X を集合とし, $\mathcal{O}'$ を X の部分集合族とする.

定義 3.1.1. 次の $\langle\mathcal{O}'\rangle$ を $\mathcal{O}'$ の生成する部分集合族 と呼ぶ:

$$\langle\mathcal{O}'\rangle := \{\emptyset\} \cup \{\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}'\}.$$

このとき $\mathcal{O}' \subset \langle\mathcal{O}'\rangle$ が成り立つ. 集合と集合族の区別に気を付けること.

例 3.1.2. 集合 X について以下が成り立つ:

(1) $\mathcal{O}' := \{X\}$ のとき, $\langle\mathcal{O}'\rangle$ は密着位相.
(2) $\mathcal{O}' := \{\{x\} \mid x \in X\}$ のとき, $\langle\mathcal{O}'\rangle$ は離散位相.

上の例では $\langle\mathcal{O}'\rangle$ が位相になったが, 一般には $\mathcal{O}'$ に条件が必要.

命題 3.1.3. $\langle\mathcal{O}'\rangle$ が位相になるための必要十分条件は, 以下が成り立つこと:

(i) $\bigcup\mathcal{O}' = X$.
(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}'$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists V \in \mathcal{O}' : x \in V \subset B_1 \cap B_2$.

上の 2 つの条件を 開基条件 という (注意: これは一般的な用語ではない).

例 3.1.4. (X, d) を距離空間とする. このとき, 次の集合族 (全ての ε-近傍の成す集合族) は開基条件をみたす: $\mathcal{O}' := \{U(x; \varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$. また, 生成される位相 $\langle \mathcal{O}' \rangle$ は距離から定まる位相と一致する.

3.1.2　位相の開基

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$ とする.

定義 3.1.5. $\mathcal{O}^*$ が 位相 $\mathcal{O}$ の開基 とは, 次が成り立つこと: $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$.

先の命題より, $\mathcal{O}^*$ は開基条件をみたす. 開基は一意的ではなく, 例えば位相 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ の開基である. しかし, 開基を考えることにより楽をすることが目的なので, $\mathcal{O}$ と比べて出来るだけ小さい開基 $\mathcal{O}^*$ を選びたい.

命題 3.1.6. $\mathcal{O}^*$ が位相 $\mathcal{O}$ の開基であることは次と同値: $\forall O \in \mathcal{O}, \forall x \in O, \exists V \in \mathcal{O}^* :$ $x \in V \subset O$.

例 3.1.7. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相とする. このとき以下は $\mathcal{O}$ の開基である:

(1) $\mathcal{O}^* := \{U(x; \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}^2,\ \varepsilon > 0\}$.
(2) $\mathcal{O}^* := \{(a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2 \mid a < b,\ c < d\}$.

ただしここで, $(a, b) \times (c, d) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b), y \in (c, d)\}$. この例から分かるように, 位相の開基は一つとは限らない (線型空間の基底が一意でないことと同様). さらに極端な例として次がある.

例 3.1.8. $\mathcal{O}^* := \{U(x; \varepsilon) \mid x \in \mathbb{Q},\ \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}\}$ は $\mathbb{R}$ の標準的な位相の開基.

最後に, 開基により楽ができる例を挙げる. すなわち, 写像が連続であることを示すためには, 全ての開集合の逆像を考えなくても, 開基の元の逆像だけを調べれば良い.

命題 3.1.9. $\mathcal{O}_Y^*$ を $\mathcal{O}_Y$ の開基とする. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続であるための必要十分条件は, 次が成り立つこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Y^*,\ f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.

他の性質についても同様に開基を用いて言い換えることができる場合が多い. それらについては演習問題を参照.

3.1.3 発展: 第二可算公理

定義 3.1.10. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対して, 次の条件を 第二可算公理 と呼ぶ: $\exists \mathcal{O}^*$: 開基 s.t. $\mathcal{O}^*$ は高々可算.

定理 3.1.11 (Urysohn の距離付け可能定理)**.** 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ は, 正規かつ第二可算公理を満たすならば, 距離空間と同相である.

3.1.4 演習問題

問題 3.1.12. $\langle \mathcal{O}' \rangle$ が位相であるとき, $\mathcal{O}'$ は開基条件 (ii) をみたすことを示せ.

問題 3.1.13. $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}$ が次をみたすとする: $\forall O \in \mathcal{O}, \forall x \in O, \exists V \in \mathcal{O}^* : x \in V \subset O$. このとき $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$ を示せ.

問題 3.1.14 (小テスト 10)**.** $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を写像, $\mathcal{O}_Y^*$ を $\mathcal{O}_Y$ の開基とし, 次が成り立つとする: $\forall O \in \mathcal{O}_Y^*$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$. このとき f は連続であることを示せ.

問題 3.1.15. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $\mathcal{O}^*$ を $\mathcal{O}$ の開基とし, $A \subset X$ とする. このとき, x $(\in X)$ が A の触点であるための必要十分条件を $\mathcal{O}^*$ を用いて述べ, それを示せ.

問題 3.1.16. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $\mathcal{O}^*$ を $\mathcal{O}$ の開基, $A \subset X$ とし, $\mathcal{O}_A$ を A 上の相対位相とする. このとき $\mathcal{O}_A^* := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}^*\}$ は $\mathcal{O}_A$ の開基であることを示せ.

問題 3.1.17. $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ に対し, $\mathcal{O}^* \subsetneq \mathcal{O}^+$ となる開基 $\mathcal{O}^*$ を作れ.

3.2　積位相

以下では, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．直積集合 $X \times Y$ の上に位相を定義する．煩雑さを避けるために $X \neq \emptyset \neq Y$ は仮定されているものとする．

3.2.1　積位相の定義

直積集合 $X \times Y$ に対して, 一般に $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ は位相になるとは限らない．しかし開基条件をみたすことは分かる．

命題 3.2.1. 次で定義される $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ は, 集合 $X \times Y$ に対して開基条件をみたす:

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y := \{O_X \times O_Y \mid O_X \in \mathcal{O}_X,\ O_Y \in \mathcal{O}_Y\}.$$

従って, $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ で生成される集合族は位相となる．以下ではこの位相を考える．ここでは 2 個の直積のみを考えるが, 3 個以上でも同様に定義できる．

定義 3.2.2. $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ の生成する部分集合族 $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ を, $X \times Y$ の 積位相 と呼ぶ．また, 位相空間 $(X \times Y, \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)$ を, $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の 積空間 (または 直積空間) と呼ぶ.

3.2.2　積位相の例

例 3.2.3. $\mathbb{R}^n$ の標準的な位相を $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ で表す．このとき, 任意の $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して次が成り立つ: $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{m+n}} = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \rangle$.

もう少し複雑な具体例に関する証明のために, 次の補題を用意する．標語的に述べると,「相対位相の積位相は, 積位相の相対位相に一致する」.

補題 3.2.4. $A \subset X$, $B \subset Y$ とし, $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ から決まる相対位相をそれぞれ $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ で表す．また, $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ から決まる $A \times B$ の相対位相を $(\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A \times B}$ で表す．このとき次が成り立つ: $\langle \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B \rangle = (\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A \times B}$.

例 3.2.5. 円柱 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と $S^1 \times \mathbb{R}$ は同相である.

念のために, 円柱には $\mathbb{R}^3$ の標準的な位相から決まる相対位相を入れ, $S^1 \times \mathbb{R}$ にはそれぞれの標準的な位相の積位相を入れている．証明には, $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^3} = \langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle$ と上の補題を用いる.

例 3.2.6 (自習用)**.** 次で定義されるトーラス T と $S^1 \times S^1$ は同相である:

$$T := \{((2+\cos\alpha)\cos\beta, (2+\cos\alpha)\sin\beta, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

3.2.3　積位相の基本的な性質

次で定義される写像を (X への) 自然な射影 と呼ぶ:

$$\pi : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x.$$

命題 3.2.7. 自然な射影 $\pi : X \times Y \to X$ に関して, 次が成り立つ:

(1) π は連続である.

(2) π は開写像である, すなわち, 任意の開集合の像は開集合である.

(3) 各 $y \in Y$ に対して, $\pi|_{X\times\{y\}} : X \times \{y\} \to X$ は同相写像である.

ここで, $X \times \{y\}$ には, $X \times Y$ の積位相から決まる相対位相が入っているものとする.

3.2.4　積位相と他の性質との関係

定理 3.2.8.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を弧状連結とすると, 積空間も弧状連結である,

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を連結とすると, 積空間も連結である,

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をコンパクトとすると, 積空間もコンパクトである.

証明には上の命題, 特に $X \cong X \times \{y\}$ を用いる. また (2) の証明は, 二点集合への全射連続写像を用いると書きやすい.

3.2.5　演習問題

問題 3.2.9 (小テスト 11)**.** ハウスドルフ空間とハウスドルフ空間の積空間はハウスドルフであることを示せ.

問題 3.2.10. 積位相から決まる相対位相は, 相対位相の積位相を含むことを示せ.

問題 3.2.11. $y_0 \in Y$ を固定する. 積空間への写像 $f : X \to X \times Y : x \mapsto (x, y_0)$ は連続であることを示せ.

問題 3.2.12. 積空間への写像 $f : X \to Y_1 \times Y_2 : x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ を考える. 各 f_i が連続のとき, f も連続であることを示せ.

3.3　商位相

以下では, $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, X を同値関係で割った商集合 $X/\sim$ の上に位相を定義する.

3.3.1　商集合の定義

まずは商集合の定義を復習する. 同値関係は前にも登場していた.

定義 3.3.1. X を集合とし, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき,

(1) $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ を x を含む <u>**同値類**</u> と呼ぶ.
(2) $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ を X の $\sim$ による <u>**商集合**</u> と呼ぶ.

商集合を求めるためには, 全単射写像を作ることが多い. 写像 $f : X/\sim \to Y$ を作るためには, まず写像 $\widetilde{f} : X \to Y$ を構成し, この $\widetilde{f}$ を用いて f を定義し, それが well-defined であることを示す. ここで f が well-defined とは, f が写像となること (つまり定義域の各元の行き先が一つに定まること).

例 3.3.2. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に対して, 以下が成り立つ:

(1) 次で定義される $\sim$ は同値関係: $x \sim x' :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$.
(2) 上の同値関係に対して, $\mathbb{R}/\sim$ と円 S^1 との間に全単射が存在する.

上で得られた商集合 $\mathbb{R}/\sim$ を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と書くことが多い. 他には $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ などが典型例.

3.3.2　商位相の定義

商集合 $X/\sim$ の上に位相を定義する.

命題 3.3.3. $\pi : X \to Y$ を全射とすると, 次は Y の位相:

$$\mathcal{O}^{\pi} := \{O \subset Y \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}.$$

定義 3.3.4. 上の命題の $\mathcal{O}^{\pi}$ を <u>**π による商位相**</u> と呼ぶ. 特に, X 上に同値関係 $\sim$ があるとき, 自然な射影 $\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$ による商位相 $\mathcal{O}^{\pi}$ を, 商集合 $X/\sim$ 上の <u>**商位相**</u> と呼ぶ. また, 商位相を入れた位相空間を <u>**商空間**</u> と呼ぶ.

3.3.3　商位相の性質

命題 3.3.5. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とする. このとき, π は $\mathcal{O}^\pi$ に関して連続.

従って, 連結・弧状連結・コンパクトの性質から, 直ちに次が分かる.

定理 3.3.6. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とする. このとき,

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ が連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ も連結である.
(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ が弧状連結ならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ も弧状連結である.
(3) $(X, \mathcal{O}_X)$ がコンパクトならば, 商空間 $(Y, \mathcal{O}^\pi)$ もコンパクトである.

この定理の逆は全て成り立たない. また, ハウスドルフ空間の商空間がハウスドルフになるとは限らない.

3.3.4　商空間の例

補題 3.3.7. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間, $\pi : X \to Y$ を全射とし, Y には商位相 $\mathcal{O}^\pi$ を入れる. また, $f : Y \to Z$ を写像とし, $\widetilde{f} := f \circ \pi$ とする. このとき, 以下は同値:

(1) $f : (Y, \mathcal{O}^\pi) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続,
(2) $\widetilde{f} : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続.

例 3.3.8. 例 3.3.2 の商集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で表す. $\mathbb{R}$ には標準位相を入れるとき,

(1) $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ は連続かつ開写像;
(2) 商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と円 S^1 は同相.

例 3.3.9. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ を, 次で定義される同値関係による商集合とする: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y = y'$. このとき, 商空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ は円柱と同相.

上の例と積位相で紹介した結果を合わせて, 円柱は以下の 3 通りの表示ができる: $\mathbb{R}^3$ の部分集合としての表示, $S^1 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$. 同様の表示方法がトーラスでも得られる.

例 3.3.10. $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ を, 次で定義される同値関係による商集合とする: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}$, $y - y' \in \mathbb{Z}$. このとき, 商空間 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ とトーラスは同相.

ちなみにトーラスは, $\mathbb{R}^2$ の代わりに, $[0, 1] \times [0, 1]$ を上と同じ同値関係で割った商空間と思うこともできる.

3.3.5　演習問題

問題 3.3.11. 全射 $\pi : (X, \mathcal{O}_X) \to Y$ に対して, $\mathcal{O}^\pi$ は Y の位相である.

(1) 位相の公理 (T2) を示せ;

(2) 位相の公理 (T3) を示せ.

問題 3.3.12 (小テスト 12)**.** 例 3.3.9 の記号を用いる. このとき, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ から円柱への全単射を作れ. (全単射であることは示さなくて良いが, well-defined は確かめること.)

問題 3.3.13. 補題 3.3.7 の (2) $\Rightarrow$ (1) を示せ.

問題 3.3.14. $\mathbb{R}$ 上の同値関係を次で定める: $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c > 0 : x = cy$.

(1) $\sim$ が同値関係であることを示せ;

(2) 商集合 $\mathbb{R}/\sim$ の元を全て挙げよ;

(3) $\mathbb{R}$ の標準位相から決まる商位相に関して, $\mathbb{R}/\sim$ がハウスドルフでないことを示せ.

3.3.6　期末試験事前レポートについて

期末試験は 2023/01/31 の授業時間に行う. それに伴い, 希望者は以下の課題を事前レポートとして提出しても良い.

問題 3.3.15 (事前レポート問題)**.** 以下に挙げるキーワードに関連する期末試験問題を予想し, その問題と解答をそれぞれ書け:

(1) 位相空間の基本, (2) 位相空間の性質,

(3) コンパクト, (4) 開基と積位相, (5) 商位相.

ただし, レポートの一枚目に全ての予想問題を書き, 二枚目以降にそれらの解答を書くこと. 表紙は付けてはいけない. 提出締切は 01/24・25 の授業時間. 対面での出席が難しい場合は, 別の手段でも良い.

3.4 期末試験

証明問題の解答を書くときには, まず最初に「示すこと」を書くこと. 示すことが正しく書かれていなかったり, 答案が著しく読みにくい場合には, 採点しないことがあります.

定義や用語など

- $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相とは $\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$.
- 閉包とは, $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall O \in \mathcal{O}\,(x \in O),\ O \cap A \neq \emptyset\}$.
- コンパクトとは, 任意の開被覆に対して, 有限部分被覆が存在すること.
- $A \subset X$ のとき, $(X, \mathcal{O}_X)$ から決まる相対位相とは, $\mathcal{O}_A := \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}_X\}$.
- ハウスドルフとは, 任意の 2 点が開集合で分離できること.
- 写像が連続とは, 任意の開集合の逆像が開集合になること.
- $\mathcal{O}^*$ が位相 $\mathcal{O}$ の開基とは, $\mathcal{O} = \langle \mathcal{O}^* \rangle := \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}^*\}$.
- 積位相とは, $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ を開基とする位相のこと.

期末試験問題

以下の [2], [3], [4] では, 主張の真偽を予想し, 正しい場合には証明し, 正しくない場合には反例を挙げよ.

[1] $\mathbb{R}$ に右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を入れた空間において, $A := [0, 2)$ の閉包が何になるかを予想せよ. また「$\overline{A} \subset$ "予想した集合"」を示せ. (20 点)

[2] 集合 X は, 離散位相 $\mathcal{O}^d$ に関してコンパクトならば有限集合. (20 点)

[3] $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間, $A \subset X$ とするとき, A は相対位相に関してハウスドルフ. (20 点)

[4] $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. また $\mathcal{O}_Y^*$ は $\mathcal{O}_Y$ の開基であるとし, $X \times Y$ および $Y \times X$ には積位相を入れる.
(1) 写像 $f : X \to Y$ は, "$\forall O \in \mathcal{O}_Y^*$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$" が成り立つなら連続. (20 点)
(2) 写像 $g : X \times Y \to Y \times X : (x, y) \mapsto (y, x)$ は連続. (20 点)

[5] $R := \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ とおき, R 上の同値関係を次で定める: $(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow \exists c > 0 : (x, y) = c(x', y')$. このとき商集合 $R/\sim$ から円 S^1 への全単射を作れ. (全単射であることは示さなくて良いが well-defined は確かめること.) (20 点)

[6] 講義・演習に関する意見・コメント・要望等があれば書いて下さい.