2023/01/10

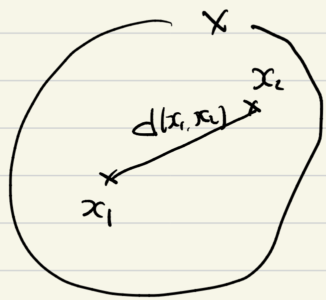
Prop. 2.5.2 (1)

(∵) [示すこと: $\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2)$, $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_d$: $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \phi$]

$\forall x_1, x_2 \in X\ (x_1 \neq x_2)$ をとる.

[示すこと: $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_d$: $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \phi$]

$\varepsilon := \frac{1}{3} d(x_1, x_2)$ とおく.



$x_1 \neq x_2$ より $\varepsilon > 0$

$O_1 := U(x_1 ; \varepsilon)$

$O_2 := U(x_2 ; \varepsilon)$

とおくと $O_1, O_2 \in \mathcal{O}_d$.

[示すこと: $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \phi$]

O_1, O_2 の def より $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$

$O_1 \cap O_2 = \phi$ ($O_1 \cap O_2 \neq \phi$ と仮定すると.
$\exists y \in O_1 \cap O_2$. よって
$3\varepsilon = d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y) + d(x_2, y) < 2\varepsilon$
矛盾 //

Prop 2.5.2 (2) : 明らか.

(3)

$\because$ ($\Rightarrow$) 演習

($\Leftarrow$) 任意の一点集合は閉とする.

[示すこと: $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ $(x_1 \neq x_2)$,

$\exists O \in \mathcal{O}$: $x_1 \in O$, $x_2 \notin O$]

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ $(x_1 \neq x_2)$ をとる

[示すこと: $\exists O \in \mathcal{O}$: $x_1 \in O$, $x_2 \notin O$]

$O := X - \{x_2\}$ とおく.

仮定より $\{x_2\} \in \mathcal{A}$ $\therefore$ $O \in \mathcal{O}$

以下略

//

Ex. 2.5.3 (1) かんたん

(2)

$\because$ $\mathcal{O}^+$ が (T_1) をみたさないことを示す

[示すこと: $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ (x_1 \neq x_2)$:

$\forall O \in \mathcal{O}^+,\ \neg(x_1 \in O \wedge x_2 \notin O)$]

$x_1 := 1$, $x_2 := 2$ とおくと、$x_1 \neq x_2$

[示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}^+,\ \neg(x_1 \in O \wedge x_2 \notin O)$]

$\forall O \in \mathcal{O}^+$ をとる.

[示すこと: $\neg(x_1 \in O \wedge x_2 \notin O)$

i.e. $x_1 \notin O \vee x_2 \in O$]

1° $x_1 \in O$ とすると.

$O \in \mathcal{O}^+$ より $\exists a < 1$: $O = (a, +\infty)$

よって $x_2 = 2 \in O$ ∎

Prop 2.5.4 (1)　　((2) は 小テスト)

∵ あらすじ：

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\forall x_1, x_2 \in X \\ (x_1 \neq x_2)\end{array}} \arrow[r, dashed, "示すこと"] \arrow[d] & \boxed{\exists O \in \mathcal{O}_X} \\
\boxed{\begin{array}{c}y_1, y_2 \in Y \\ (y_1 \neq y_2)\end{array}} \arrow[r, "仮定"'] & \boxed{\exists O' \in \mathcal{O}_Y} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$\left(\begin{array}{l} f: \text{cont} \\ f: \text{inj} \end{array}\right)$

Cor. 2.5.6

∵ $\exists d$: $\mathbb{R}$ 上の距離 s.t. $(\mathbb{R}, d) \cong (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ と仮定

ハウスドルフ　→ $(\mathbb{R}, d)$

ハウスドルフ でない → $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$

矛盾

Prop 2.5.7

(∵) [示すこと: A : 閉 in X

i.e., $X-A \in \mathcal{O}$

i.e., $\forall x \in X-A$, $\exists O \in \mathcal{O}$: $x \in O \subset X-A$]

あらすじ

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\forall x \in X-A} \arrow[r, dashed, "\text{示}"] \arrow[d] & \boxed{\exists O \in \mathcal{O}} \\
\boxed{\text{2点}} \arrow[r] & \boxed{\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}} \arrow[dl] \\
\boxed{A\text{の open cover}} \arrow[r] & \boxed{\exists\text{有限個}} \arrow[uu, bend right]
\end{tikzcd}
$$

$\forall x \in X-A$ をとる。

[示すこと: $\exists O \in \mathcal{O}$: $x \in O \subset X-A$]

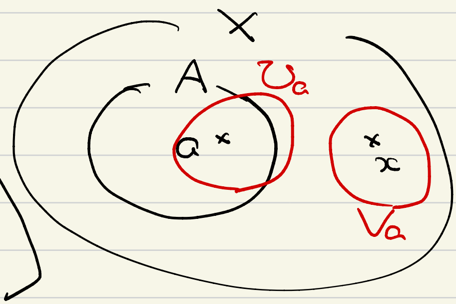
$a \in A$ をとる。

$a \neq x$, $(X, \mathcal{O})$: ハウスドルフ より

$\exists U_a, V_a \in \mathcal{O}$: $a \in U_a$, $x \in V_a$,

$U_a \cap V_a = \phi$

(注: $O := \bigcap_{a \in A} V_a$ とすると、$x \in O \subset X - A$ はよいけど $O \in \mathcal{O}$ とは限らない)



$\mathcal{U} := \{ U_a \cap A \mid a \in A \}$ とおく。

$\mathcal{U}$ は A の open cover.

A: cpt より

$\exists n \in \mathbb{N}, \exists a_1, \dots, a_n \in A$: $A = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{a_i} \cap A)$

ここで $O := \bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ とおくと、$O \in \mathcal{O}$.

[示すこと: $x \in O \subset X - A$]

- $x \in O$ は明らか.
- $$O \cap A = \left(\bigcap_{j=1}^{n} V_{a_j} \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} (U_{a_i} \cap A) \right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\bigcap_{j=1}^{n} V_{a_j} \cap U_{a_i}}_{(\subset V_{a_i} \cap U_{a_i} = \emptyset)} \Big) = \emptyset$$

より $O \subset X - A$ ☑

Prop 2.5.8

∵ [示すこと: f は閉写像

i.e. $\forall A \in \mathcal{A}_X$, $f(A) \in \mathcal{A}_Y$]

$\forall A \in \mathcal{A}_X$ をとる.

[示すこと: $f(A) \in \mathcal{A}_Y$]

$(X, \mathcal{O}_X)$: cpt, $A \in \mathcal{A}_X$ より

A : cpt

f : cont より

$f(A)$: cpt

$(Y, \mathcal{O}_Y)$: ハウスドルフ より

$f(A) \in \mathcal{A}_Y$ $\blacksquare$

Prop 3.1.3

$\because$ $(\Rightarrow)$ (i) かんたん

(ii) 演習

$(\Leftarrow)$ (T1), (T3) かんたん

[示すこと: (T2) $\forall O_1, O_2 \in \langle \mathcal{O}' \rangle$, $O_1 \cap O_2 \in \langle \mathcal{O}' \rangle$]

$\forall O_1, O_2 \in \langle \mathcal{O}' \rangle$ をとる.

[示すこと: $O_1 \cap O_2 \in \langle \mathcal{O}' \rangle$]

$O_1, O_2 \in \langle \mathcal{O}' \rangle$ より

$$\exists \{ U_\lambda \in \mathcal{O}' \mid \lambda \in \Lambda_1 \} : \quad O_1 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} U_\lambda$$

$$\exists \{ V_\lambda \in \mathcal{O}' \mid \lambda \in \Lambda_2 \} : \quad O_2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_2} V_\lambda$$

このとき

$$\begin{aligned} O_1 \cap O_2 &= \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} U_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_2} V_\lambda \right) \\ &= \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda_1 \\ \mu \in \Lambda_2}} (U_\lambda \cap V_\mu) \end{aligned}$$

$U_\lambda, V_\mu \in \mathcal{O}'$ なので、仮定(iii) より

各 $x \in U_\lambda \cap V_\mu$ において

$$\exists W_x \in \mathcal{O}' : x \in W_x \subset U_\lambda \cap V_\mu$$

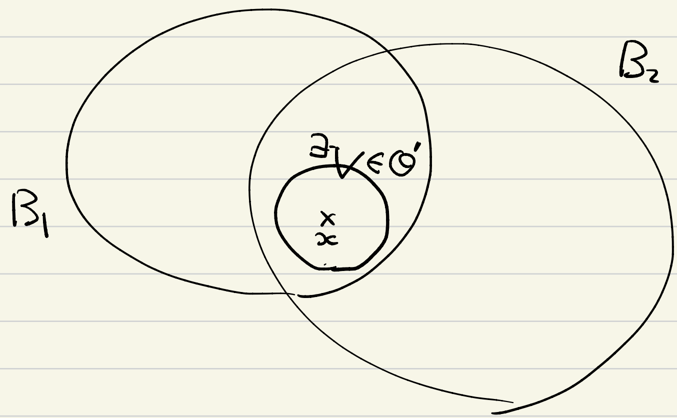
よって

$$U_\lambda \cap V_\mu = \bigcup_{x \in U_\lambda \cap V_\mu} W_x \left(\in \langle \mathcal{O}' \rangle \right)$$

$$\therefore O_1 \cap O_2 = \bigcup_{\substack{\lambda \in \Lambda_1 \\ \mu \in \Lambda_2 \\ x \in U_\lambda \cap V_\mu}} W_x \in \langle \mathcal{O}' \rangle$$

$\boxtimes$

条件(iii) のイメージ



Prop 3.16

$\because$ $(\Rightarrow)$ $\langle \mathcal{O}^* \rangle = \mathcal{O}$ とする.

[示すこと: $\forall O \in \mathcal{O},\ \forall x \in O,\ \exists V \in \mathcal{O}^* : x \in V \subset O$]

$\forall O \in \mathcal{O},\ \forall x \in O$ をとる.

[示すこと: $\exists V \in \mathcal{O}^* : x \in V \subset O$]

$O \in \mathcal{O} = \langle \mathcal{O}^* \rangle$ より

$\exists \{ O_\lambda \in \mathcal{O}^* \mid \lambda \in \Lambda \} : O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda .$

$x \in O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ より

$\exists \lambda \in \Lambda : x \in O_\lambda$

$V := O_\lambda$ とおけばよい //

$(\Leftarrow)$ 演習 //

$\blacksquare$