2023/01/17

Prop 32.1 $\mathcal{O}' := \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$

∵ [示すこと: (i) $\bigcup \mathcal{O}' = X \times Y$

(ii) ${}^\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}'$, ${}^\forall x \in B_1 \cap B_2$, ${}^\exists V \in \mathcal{O}'$: $x \in V \subset B_1 \cap B_2$]

(i) $X \in \mathcal{O}_X$, $Y \in \mathcal{O}_Y$ より

$$X \times Y \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}'$$

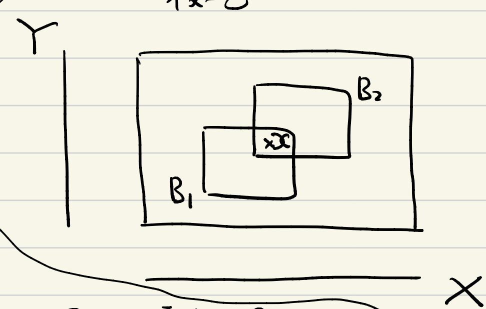
$$\therefore \bigcup \mathcal{O}' = X \times Y \quad //$$

(ii) ${}^\forall B_1, B_2 \in \mathcal{O}'$, ${}^\forall x \in B_1 \cap B_2$ をとる。

[示すこと: ${}^\exists V \in \mathcal{O}'$:

$x \in V \subset B_1 \cap B_2$]

イメージ



$B_1, B_2 \in \mathcal{O}'$ より

${}^\exists U_X \in \mathcal{O}_X$, ${}^\exists U_Y \in \mathcal{O}_Y$: $B_1 = U_X \times U_Y$

${}^\exists W_X \in \mathcal{O}_X$, ${}^\exists W_Y \in \mathcal{O}_Y$: $B_2 = W_X \times W_Y$

$V := (U_X \cap W_X) \times (U_Y \cap W_Y)$ とおけばよい ▨

Ex. 3.2.3　$\mathcal{O}' := \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$

∵ $\left[\text{示すこと: } \forall O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{m+n}},\ \forall x \in O,\ \exists V \in \mathcal{O}' : x \in V \subset O \right]$

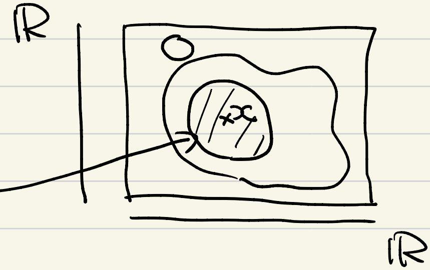
$m=n=1$ で示す.

$\forall O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$, $\forall x \in O$ をとる.

$\left[\text{示すこと: } \exists V \in \mathcal{O}' : x \in V \subset O \right]$

$x \in O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}$ より

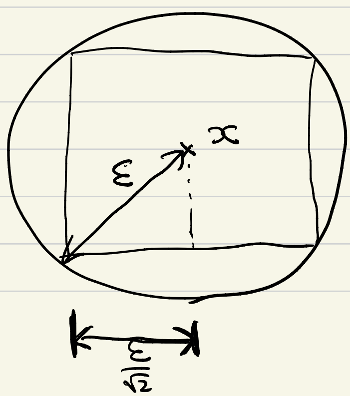
$\exists \varepsilon > 0 : U(x;\varepsilon) \subset O.$



$x = (x_1, x_2)$ とおく.

$$V := \left(x_1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ x_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \times \left(x_2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\ x_2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

とおけばよい ■



Prop 3.2.7 $\quad \pi : X\times Y \to X : (x, y) \mapsto x$.

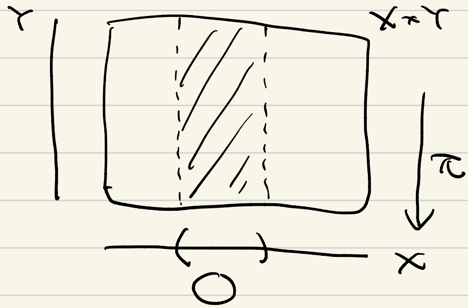
∵ (1) [示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}_X$, $\pi^{-1}(O) \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$]

$\forall O \in \mathcal{O}_X$ をとる.

[示すこと: $\pi^{-1}(O) \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$]

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}(O) &= O \times Y \\
&\in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \\
&\subset \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle
\end{aligned}
$$

//



(2) [示すこと: $\forall O \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$, $\pi(O) \in \mathcal{O}_X$]

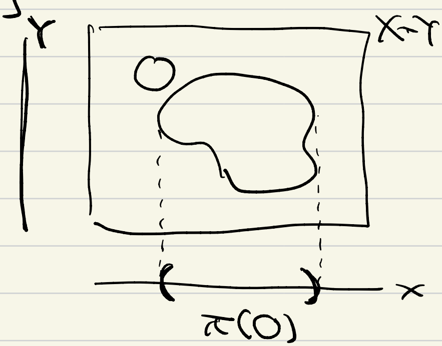
$\forall O \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ をとる.

[示すこと: $\pi(O) \in \mathcal{O}_X$]

$O \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ より

$\exists U_\lambda \times V_\lambda \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$
$(\lambda \in \Lambda)$:

$$O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda)$$

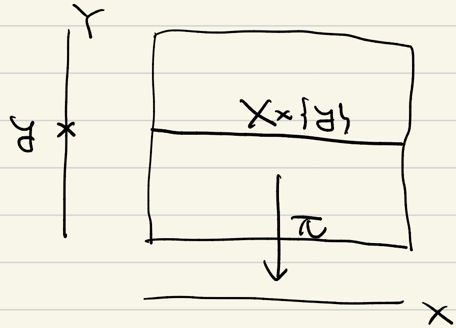


$$
\begin{aligned}
\pi(O) &= \pi\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda \times V_\lambda)\Big) \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi(U_\lambda \times V_\lambda) \qquad (\because \text{示せ}) \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_X \qquad (\because U_\lambda \in \mathcal{O}_X)
\end{aligned}
$$

//

(3) $\pi' := \pi|_{X\times\{y\}} : X\times\{y\} \longrightarrow X$

$$
\left[\begin{array}{ll}
\text{示すこと} & \text{(i)} \ \pi' : \text{bij} \\
& \text{(ii)} \ \pi' : \text{cont} \\
& \text{(iii)} \ \pi'^{-1} : \text{cont}
\end{array}\right]
$$



(i) 明らか //

(ii) π : cont の制限より //

(iii) 演習 //

$\blacksquare$

Ex 3.3.2

(1) 自習

(2) $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ とおく.

$t \longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$ とおく.

$[t] \longmapsto \tilde{f}(t)$

[示すこと: f は well-defined (← 写像である)

i.e., $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $([t_1] = [t_2])$, $\tilde{f}(t_1) = \tilde{f}(t_2)$]

$\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $([t_1] = [t_2])$ をとる.

[示すこと: $\tilde{f}(t_1) = \tilde{f}(t_2)$]

$[t_1] = [t_2]$ より $\underbrace{t_1 - t_2}_{=: n} \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ $t_1 = t_2 + n$.

よって

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t_1) &= \tilde{f}(t_2 + n) \\ &= (\cos 2\pi(t_2 + n), \sin 2\pi(t_2 + n)) \\ &= (\cos 2\pi t_2, \sin 2\pi t_2) = \tilde{f}(t_2)\end{aligned}$$

$\boxed{/\!/}$

Rem 「f が well-defined」

を示すときに f は使わないのがよい

「$[x_1]=[x_2]$ より $f([x_1])=f([x_2])$」

とかいてまちがう人が多発するから。

Prop 3.3.5

(∵) [示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}^{\pi}$, $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

$\forall O \in \mathcal{O}^{\pi}$ をとる.

[示すこと: $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

$O \in \mathcal{O}^{\pi}$ なので $\mathcal{O}^{\pi}$ の def より

$\pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$

Lem 3.3.7

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft" near start, shift right=3] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

に対して　f: cont $\Longleftrightarrow$ $\tilde{f}$: cont

∵ $(\Leftarrow)$ 演習

$(\Rightarrow)$ f: cont とする

[示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}_Z$, $\tilde{f}^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

$\forall O \in \mathcal{O}_Z$ をとる

[示すこと: $\tilde{f}^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

f: cont より　$f^{-1}(O) \in \mathcal{O}^{\pi}$

$\mathcal{O}^{\pi}$ の def より　$\underbrace{\pi^{-1}(f^{-1}(O))}_{=(f\circ\pi)^{-1}(O) = \tilde{f}^{-1}(O)} \in \mathcal{O}_X$

Ex. 3.3.8

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

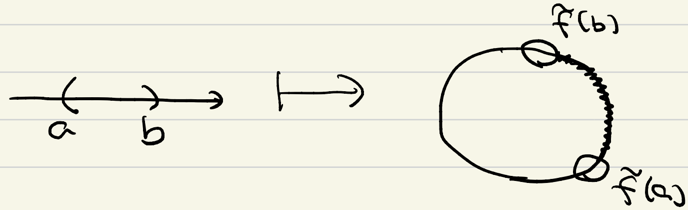
∵ (1) claim $\tilde{f}$: cont

∵) cos , sin で なりたてば なる //

claim $\tilde{f}$: 開写像

∵) $\mathcal{O}' := \{ (a,b) \subset \mathbb{R} \mid a<b \}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ の 開基

[示すこと: $^{\forall}(a,b) \in \mathcal{O}'$, $\tilde{f}((a,b)) \in \mathcal{O}_{S^1}$]



より //

(2) $\tilde{f}$: cont より f : cont.

$\tilde{f}$: 開写像 より f^{-1} : cont

(問 : 示せ)

∎