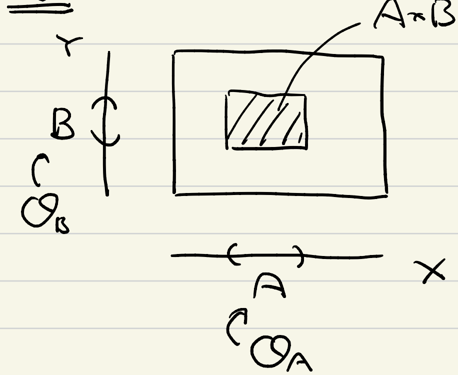
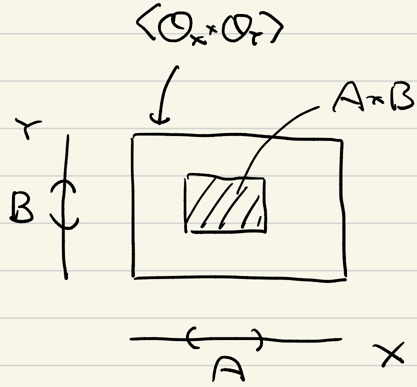
2023/01/21 （積位相）

Lem 3.24





$$\rightsquigarrow \quad \langle \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B \rangle = (\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A\times B}$$

∵ (⊂) 演習 //

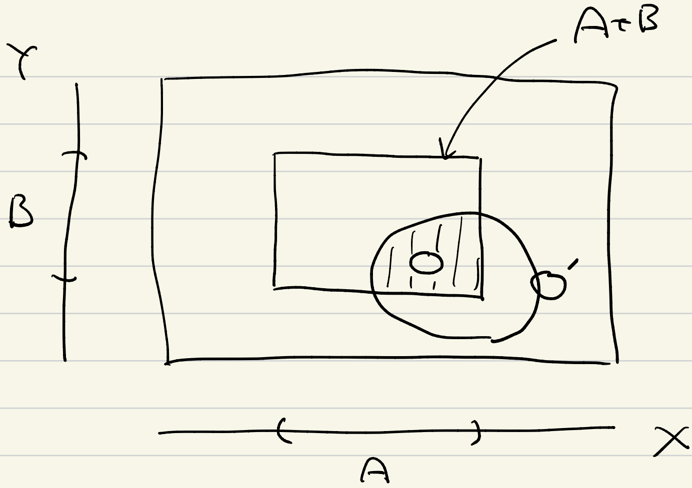
(⊃) [示すこと: $\forall O \in (\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A\times B},\ O \in \langle \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B \rangle$]

$\forall O \in (\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A\times B}$ をとる.

[示すこと: $O \in \langle \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B \rangle$]

$O \in (\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A\times B}$ より

$\exists O' \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle : O = O' \cap (A\times B)$



$O' \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ より

$$\exists O'_\lambda \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \ (\lambda \in \Lambda) : \quad O' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O'_\lambda$$

$O'_\lambda \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ より

$$\exists U_\lambda \in \mathcal{O}_X ,\ \exists V_\lambda \in \mathcal{O}_Y : \quad O'_\lambda = U_\lambda \times V_\lambda .$$

よって

$$\begin{aligned} O &= O' \cap (A \times B) \\ &= \Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \times V_\lambda) \Big) \cap (A \times B) \\ &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Big(\underbrace{(U_\lambda \times V_\lambda) \cap (A \times B)} \Big) \\ &\qquad = (\underbrace{U_\lambda \cap A}_{\in \mathcal{O}_A}) \times (\underbrace{V_\lambda \cap B}_{\in \mathcal{O}_B}) \\ &\in \langle \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B \rangle \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Ex. 3.2.5

∵ $C := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ とおく

$f : C \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ と同一視する

$(x, y, z) \longmapsto ((x, y), z)$

(上の Lem を用いる)

$$\begin{array}{ccc} X := \mathbb{R}^2 & , & Y := \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ A := S^1 & , & B := \mathbb{R} \end{array}$$ とおく

上の Lem より

$$\begin{array}{ccc} \langle \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B \rangle & = & (\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle)_{A \times B} \\ \| & & \| \\ \langle \mathcal{O}_{S^1} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle & & (\langle \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \times \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \rangle)_{S^1 \times \mathbb{R}} \\ \uparrow & & \| \\ S^1 \times \mathbb{R} \text{ の位相} & & (\mathcal{O}_{\mathbb{R}^3})_{S^1 \times \mathbb{R}} \\ & & \uparrow \\ & & \text{円柱 } C \text{ の位相} \end{array}$$

$\blacksquare$

Thm 3.2.8 (1)

∵ $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$: path-conn とする.

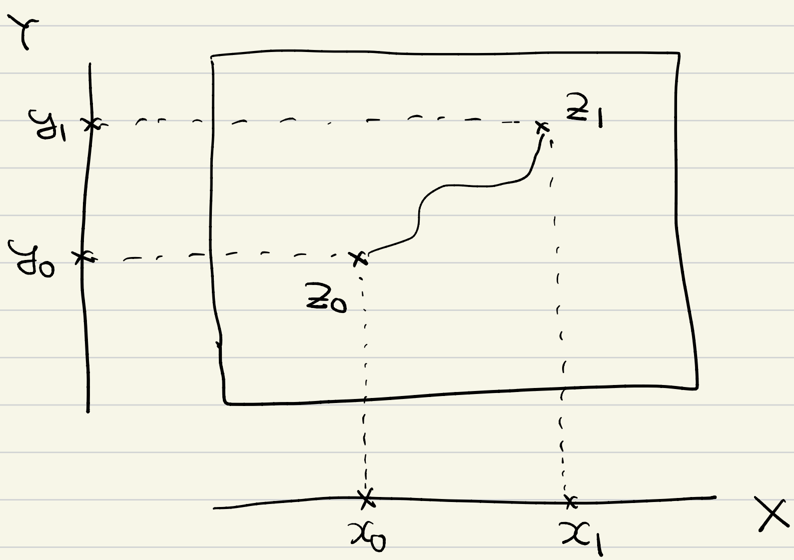
[示すこと: $X \times Y$ も path-conn

i.e. $\forall z_0, z_1 \in X \times Y$, $\exists c : [0,1] \to X \times Y$: cont

s.t. $c(0) = z_0$, $c(1) = z_1$]

$\forall z_0, z_1 \in X \times Y$ をとる.

[示すこと: $\exists c : [0,1] \to X \times Y$: cont ; $c(0) = z_0$, $c(1) = z_1$]

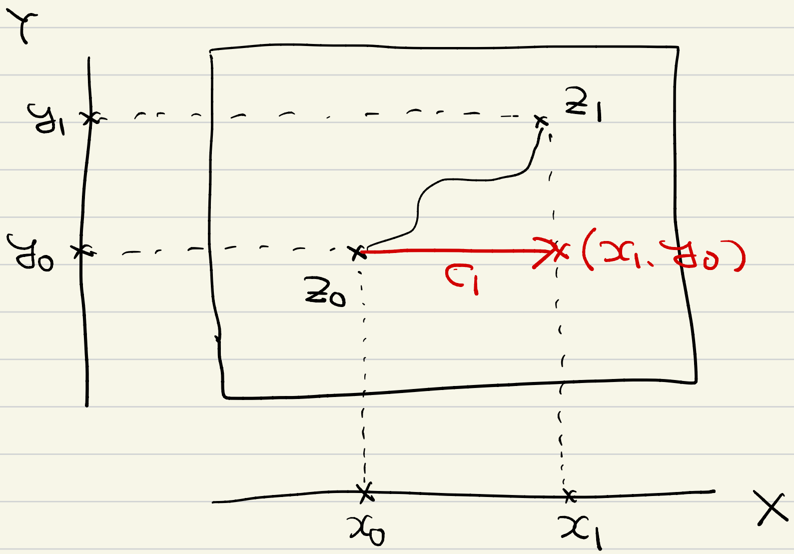


$z_0 = (x_0, y_0)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ とする.

$X \times \{y_0\} \cong X$: path-conn より

cont. $\exists c_1 : [0,1] \longrightarrow X \times \{y_0\} \ (\subset X \times Y)$

s.t. $c_1(0) = (x_0, y_0)$, $c_1(1) = (x_1, y_0)$



同様に $(x_1, y_0) \rightsquigarrow (x_1, y_1) = z_1$

を道で結べばよい

$\square$

Thm 3.28 (2)

∵ $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$: 連結とする.

示すこと: $X \times Y$: 連結

i.e. $\neg \left(\exists f : X \times Y \longrightarrow \{1, 2\} : \text{cont surj} \right)$

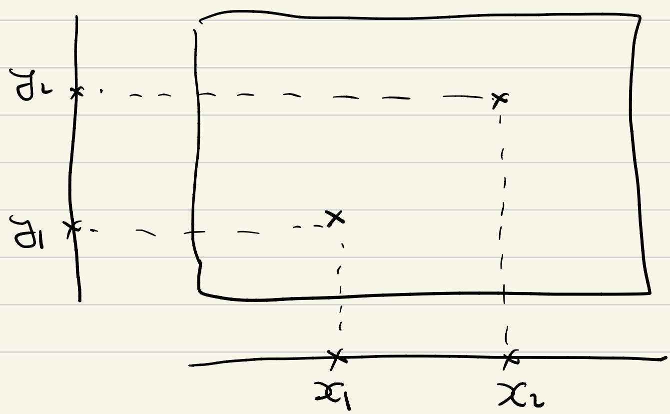
離散

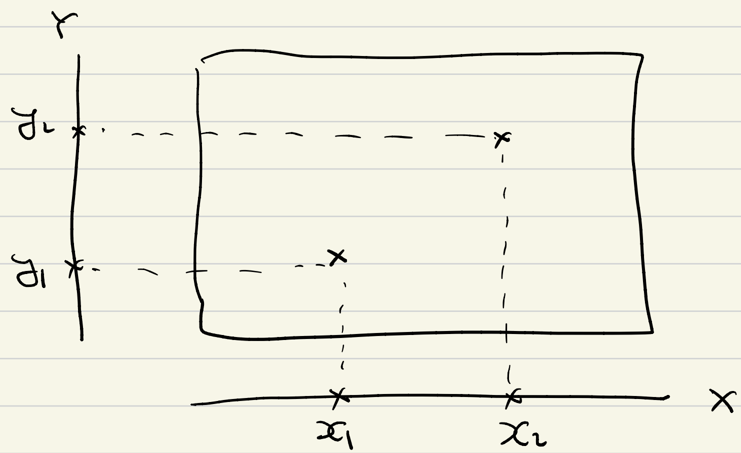
$\exists f : X \times Y \longrightarrow \{1, 2\}$: cont surj と仮定

全射より

$\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$

s.t. $\begin{cases} f(x_1, y_1) = 1 \\ f(x_2, y_2) = \cancel{1}\ 2 \end{cases}$





$f|_{X\times\{y_1\}} : X\times\{y_1\} \longrightarrow \{1,2\}$: cont

$X\times\{y_1\}$: 連結 より

$f|_{X\times\{y_1\}}$ は surj. でない

$f(x_1,y_1)=1$ より, とくに $f(x_2,y_1)=1$

一方で, $\{x_2\}\times Y$ で同じことを考えると

$f(x_2,y_2)=2$ より $f(x_2,y_1)=2$

矛盾 $\square$

Thm 3.2.8 (3)　(少し細く书く)

(:)　$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$: cpt とする.

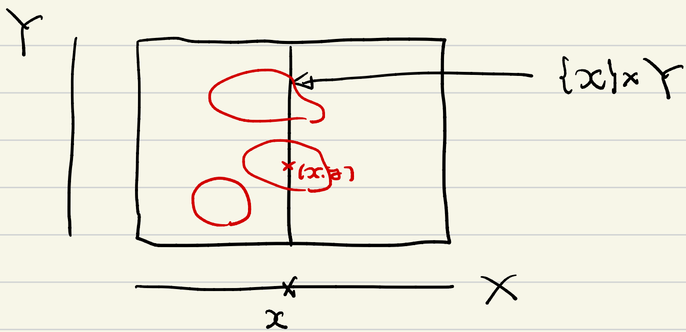
[示すこと: ${}^\forall \mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: $X \times Y$ の open cover, ${}^\exists n \in \mathbb{N}$, ${}^\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$: $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$]

${}^\forall \mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$: $X \times Y$ の open cover をとる.

[示すこと: ${}^\exists n \in \mathbb{N}$, ${}^\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$: $X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}$]

各 $(x, y) \in X \times Y$ について

${}^\exists \lambda = \lambda(x, y) \in \Lambda$: $(x, y) \in U_{\lambda(x,y)}$



$U_{\lambda(x,y)} \in \langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$ より

${}^\exists U'_{\lambda(x,y)} \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$: $(x, y) \in U'_{\lambda(x,y)} \subset U_{\lambda(x,y)}$

各 $x \in X$ に対して、

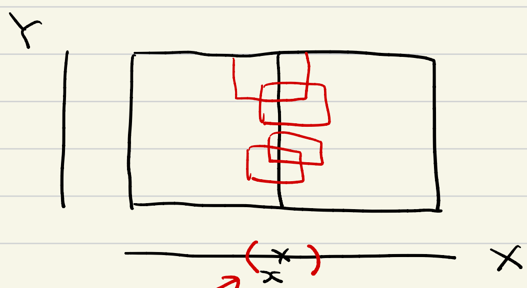
$$\mathcal{U}_x := \{ U'_{\lambda(x,y)} \cap (\{x\} \times Y) \mid y \in Y \}$$

とおく。これは $\{x\} \times Y$ の open cover.

Y: cpt より

$$\exists m = m_x \in \mathbb{N},\ \exists y_1, \dots, y_m \in Y :$$

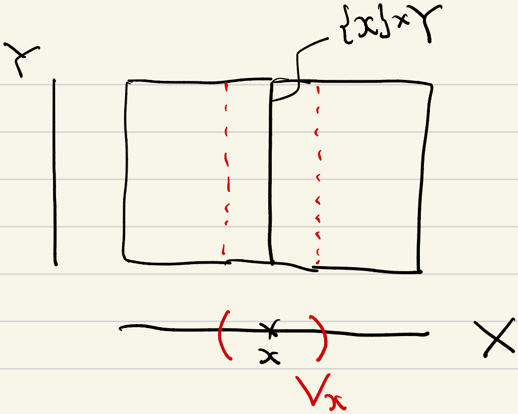
$$\{x\} \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} \left(U'_{\lambda(x,y_i)} \cap (\{x\} \times Y) \right) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U'_{\lambda(x,y_i)}$$



ここで $V_x := \bigcap_{i=1}^{m} \pi(U'_{\lambda(x,y_i)})$ とおく.

π: 開写像 より $V_x \in \mathcal{O}_X$.

さらに $U'_{\lambda(x,y_i)} \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ より $\pi^{-1}(V_x) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U'_{\lambda(x,y_i)}$



X: cpt であり,

$\{V_x \mid x \in X\}$ は X の open cover なので,

$$\exists l \in \mathbb{N},\ \exists x_1, \dots, x_l \in X : \quad X = \bigcup_{i=1}^{l} V_{x_i}$$

ということで,

X は $V_{x_1}, \dots, V_{x_l}$ で cover される.

$X \times Y$ は $\pi^{-1}(V_{x_1}), \dots, \pi^{-1}(V_{x_l})$ で cover される

それぞれも有限コで cover される

(上級者向け問: ちゃんと示せ)

$\blacksquare$