2023/01/22 (高位相)

Ex 3.3.2 (2)

$\because$) $f : \mathbb{R}/\sim \longrightarrow S^1$

$[x] \longmapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$

が well-defined まで示した.

<u>claim</u> f : surj.

$\because$) [示すこと: $\forall p \in S^1, \exists [x] \in \mathbb{R}/\sim : f([x]) = p$]

$\forall p \in S^1$ をとる.

[示すこと: $\exists [x] \in \mathbb{R}/\sim : f([x]) = p$]

$p \in S^1$ より

$\exists \alpha \in \mathbb{R} : p = (\cos \alpha, \sin \alpha)$

$x := \frac{\alpha}{2\pi}$ とおく.

[示すこと: $f([x]) = p$]

$f([x]) = \left(\cos 2\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi}, \sin 2\pi \cdot \frac{\alpha}{2\pi}\right)$

$= (\cos \alpha, \sin \alpha) = p$ //

claim f : inj.

$\because$) [示すこと: $\forall [t], [t'] \in \mathbb{R}/\sim \ (f([t]) = f([t']),$
$[t] = [t'])$]

$\forall [t], [t'] \in \mathbb{R}/\sim \ (f([t]) = f([t']))$ をとる.

[示すこと: $[t] = [t']$]

$f([t]) = f([t'])$ より

$$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = (\cos 2\pi t', \sin 2\pi t')$$

$$\therefore \ 2\pi t - 2\pi t' \in 2\pi \mathbb{Z}$$

$$\therefore \ t - t' \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \ [t] = [t'] \quad //$$

$\boxed{\text{Q}}$

Note $\mathbb{R}/\sim \longrightarrow [0, 2\pi)$

でも bij だが, 後で困る...

Prop 3.3.5

(∵) [示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}^{\pi}$, $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

$\forall O \in \mathcal{O}^{\pi}$ をとる.

[示すこと: $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

$\mathcal{O}^{\pi}$ の def より $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$ ☑

Thm 3.3.6

(∵) 以前の Prop より従う ☑

Lem 3.3.7

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[drr, bend left, "\tilde{f}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & \\
(Y, \mathcal{O}^{\pi}) \arrow[rr, "f"'] & & (Z, \mathcal{O}_Z)
\end{tikzcd}$$

$(\tilde{f} = f \circ \pi)$

∵

(2) ⇒ (1) : 演習 //

(1) ⇒ (2) : f : cont とする.

[示すこと: $\tilde{f}$: cont

i.e. $\forall O \in \mathcal{O}_Z$, $\tilde{f}^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

$\forall O \in \mathcal{O}_Z$ をとる.

[示すこと: $\tilde{f}^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$]

f : cont より $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}^{\pi}$

$\mathcal{O}^{\pi}$ の def より $\underbrace{\pi^{-1}(f^{-1}(O))}_{} \in \mathcal{O}_X$

$$\pi^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ \pi)^{-1}(O) = \tilde{f}^{-1}(O)$$

(f, π : cont より $\tilde{f}$ も cont)

$\boxed{/\!/}$

Ex. 3.3.8 ($\mathbb{R}/\mathbb{Z} := \mathbb{R}/\sim$, $x \sim y :\Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$)

∵ $\tilde{f} : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

(1) claim $\tilde{f}$: cont

∵) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ とみたとき、cont だから //

claim $\tilde{f}$: 開写像

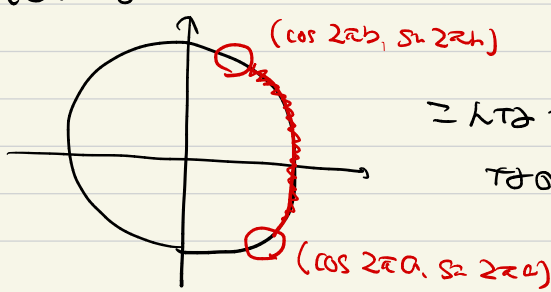
∵) 開基をつかう。

$\mathcal{O}' := \{(a,b) \subset \mathbb{R} \mid a<b\}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ の開基だった。

[示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}'$, $\tilde{f}(O) \in \mathcal{O}_{S^1}$]

$\forall O \in \mathcal{O}'$ をとる。

$\tilde{f}(O)$ は



こんなやつ

なので開 //

(2) 示すこと: $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$: 同相

$$[t] \longmapsto \tilde{f}(t)$$

<u>claim</u> f : bij ∵) 示した //

<u>claim</u> f : cont

∵) $\tilde{f}$: cont より //

<u>claim</u> f^{-1} : cont

∵) $g := f^{-1}$ とおく.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & \\
\mathbb{R}/\mathbb{Z} & S^1 \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

[示すこと: $\forall O \in \mathcal{O}^{\pi}$, $g^{-1}(O) \in \mathcal{O}_{S^1}$]

$\forall O \in \mathcal{O}^{\pi}$ をとる.

[示すこと: $g^{-1}(O) \in \mathcal{O}_{S^1}$]

$\mathcal{O}^{\pi}$ の def より $\pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$

$\tilde{f}$: 開写像 より $\tilde{f}(\pi^{-1}(O)) \in \mathcal{O}_{S^1}$

$$\begin{array}{c} \| \\ g^{-1}(O) \end{array}$$

(問:示せ)

$\square$

Ex. 3.3.9

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\pi"'] \arrow[drr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & \\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \arrow[rr, "f"'] & & S^1 \times \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ただし $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), y)$$

で同じことをやれば良い $\boxed{\text{証}}$