第 1 章

平面曲線の曲率

なめらかな平面曲線の曲率を定義し，その意味や性質を紹介する．

1.1　曲線の助変数表示

以下，I は $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合を表すものとする．なお，$\mathbb{R}^2$ の元はスペースの都合で横ベクトルで表しているが，縦ベクトルと思っておいた方が便利なことが多い．

定義 1.1.1　写像 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が なめらかな曲線 とは，次が成り立つこと：

(i)　c は C^∞ 級．

(ii)　$\forall t \in I$，$c'(t) \neq (0,0)$．

ベクトル $c'(t)$ を 速度ベクトル と呼ぶ．像 $c(I)$ のことをなめらかな曲線と呼び，写像 c あるいは $c(t)$ をその 助変数表示 と呼ぶこともある．

例 1.1.2　次の (1)，(2) はなめらかな曲線であり，(3)，(4) はなめらかな曲線ではない：

(1)　（半径 $r > 0$ の円）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r\cos t, r\sin t)$．

(2)　（C^∞ 級関数 $f : I \to \mathbb{R}$ のグラフ）$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, f(t))$．

(3)　（$y = |x|$ のグラフ）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, |t|)$．

(4)　（単純カスプ）$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3, t^2)$．

1.2　曲線の曲率の定義

定義 1.2.1　なめらかな曲線 $c : I \to \mathbb{R}^2$ に対して，次の $\kappa(t)$ を 曲率 と呼ぶ：

$$\kappa(t) := \det(c'(t), c''(t))/|c'(t)|^3.$$

写像 κ そのものを曲率，あるいは曲率関数と呼ぶこともある．曲線を $c(t) = (x(t), y(t))$ とおくと，曲率の定義式の分母と分子は，それぞれ以下のように表される：

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det\begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} = x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t),$$
$$|c'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

定義より $|c'(t)| \neq 0$ であるから，曲率の分母は 0 にならないことに注意する．

例 1.2.2　半径 $r > 0$ の円の曲率に対して，以下が成り立つ：

(1)　$c(t) = (r\cos t, r\sin t)$ とすると，$\kappa(t) = 1/r$.

(2)　定数 $a \neq 0$ を用いて $c(t) = (r\cos(at), r\sin(at))$ とすると，$a > 0$ なら $\kappa(t) = 1/r$，$a < 0$ なら $\kappa(t) = -1/r$.

問題 1.2.3　半径 $r > 0$ の円の上半分を $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ のグラフだと思って，$c(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2})$ を考える（ただし $t \in (-r, r)$）．このときの曲率 $\kappa(t)$ を求めよ．

問題 1.2.4（小テスト 1）　楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の曲率を計算し，曲率の絶対値が最大になる点と最小になる点を求めよ．ただし $a > b > 0$ とする．

1.3　曲率の性質：合同での不変性

この章では，曲線の曲率が，回転や平行移動をしても変わらないことを紹介する．そのために，まずは回転や平行移動の定義を復習する．

定義 1.3.1　$c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき，

(1)　c_1 と c_2 が <u>向きを保つ合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{SO}(2)$，$\exists v \in \mathbb{R}^2$: $\forall t \in I$，$c_2(t) = gc_1(t) + v$.

(2)　c_1 と c_2 が <u>合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{O}(2)$，$\exists v \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in I$，$c_2(t) = gc_1(t) + v$.

上記において，$g \in \mathrm{SO}(2)$ は回転を表し，$v \in \mathbb{R}^2$ は平行移動を表す．また，$g \in \mathrm{O}(2)$ による変換は，回転と折り返しの合成を表す．

命題 1.3.2　$c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．もし c_1 と c_2 が向きを保つ合同であるならば，両者の曲率は等しい．すなわち次が成り立つ：$\kappa_{c_1} = \kappa_{c_2}$.

問題 1.3.3　なめらかな曲線を折り返すと，その曲率は -1 倍されることを示せ．

1.4　復習：合成写像の微分

ここでは，合成写像の微分の公式，いわゆるチェインルールを復習する．ここでは, 表記を簡単にするために，ヤコビ行列を用いて書く．

定義 1.4.1　$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする．また，$\mathbb{R}^m$ の座標を $(x_1, \ldots, x_m)$ で表し，$f = (f_1, \ldots, f_n)$ とおく．このとき次を f の $p \in \mathbb{R}^m$ における ヤコビ行列 と呼ぶ：

$$(Jf)_p := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n.$$

命題 1.4.2（合成写像の微分）　$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$，$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ を C^∞ 級写像とし，$p \in \mathbb{R}^m$ とする．このとき次が成り立つ：$(J(g \circ f))_p = (Jg)_{f(p)}(Jf)_p$.

これらの行列を成分で表すと, 通常のよくみるチェイン・ルールになっている.

1.5　曲率の性質：パラメータ変換での不変性

ここでは，曲線の曲率が助変数表示の取り方に依存しないことを示す．直感的には，道路の曲がり具合は車でどう走ろうが変わらない，ということと同様. 以下では I，I' を $\mathbb{R}$ 内の空でない開集合とする.

定義 1.5.1　写像 $t : I' \to I$ が 正のパラメータ変換 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　全単射.

(ii)　C^∞ 級.

(iii)　$\forall s \in I'$，$t'(s) > 0$.

上記の条件のうち (iii) を「$\forall s \in I'$, $t'(s) < 0$」に置き換えたものを 負のパラメータ変換 と呼ぶ．正のパラメータ変換は，車の走行で言うと「走り方は変えても方向は変えない」ことに対応する.

命題 1.5.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とし，$t : I' \to I$ を正のパラメータ変換とする．このとき以下が成り立つ：

(1)　$c \circ t : I' \to \mathbb{R}^2$ はなめらかな曲線.

(2)　$\forall s \in I'$，$\kappa_c(t(s)) = \kappa_{c \circ t}(s)$.

すなわち，曲線の曲率は正のパラメータ変換で不変である．また，負のパラメータ変換をすると曲率は -1 倍される．ここで，κ_c と $\kappa_{c \circ t}$ はそれぞれ c と $c \circ t$ の曲率を表す.

1.6　曲率の意味：加速度

ここでは，助変数表示を車の走行と考え，曲率が「一定の速度で走ったときの加速度」を表すことを示す．当然ながら，大きな加速度を感じる道路の方が大きく曲がっている．

定義 1.6.1　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき，c が 弧長パラメータ表示 であるとは，次が成り立つこと：$\forall t \in I$，$|c'(t)| = 1$.

弧長パラメータ表示することが「一定の速度（速さ 1）で走る」ことに対応する．次の命題は，「どんな道路でも一定の速度で走ることができる」ことを意味する．

命題 1.6.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ をなめらかな曲線とする．このとき次が成り立つ：$\exists t = t(s)$（正のパラメータ変換）：$c \circ t$ は弧長パラメータ表示.

上記の証明には逆関数定理を用いる（今回は省略）．結論としては，どんな道路でも速さ 1 で走ることができる．そのときの加速度を表示するために，次のベクトルを用いる．

定義 1.6.3　$c(t) = (x(t), y(t))$ を弧長パラメータ表示とする．このとき，次を（左向きの）単位法ベクトル と呼ぶ：$n(t) := (-y'(t), x'(t))$.

上記の単位法ベクトルは，$\mathbb{R}^2$ のベクトルを縦で書いて，次のように表すと意味が分かりやすい：

$$\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

命題 1.6.4　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき次が成り立つ：$\forall t \in I$, $c''(t) = \kappa_c(t) n(t)$.

特に $|c''| = |\kappa_c|$ が成り立つ．すなわち，曲率の絶対値は，加速度ベクトル c'' の大きさと一致する．これが曲率の意味の一つである．

1.7　曲率の意味：単位法ベクトルの微分

弧長パラメータ表示 $c(t)$ に対し，単位法ベクトルは $n(t) = (-y'(t), x'(t))$ で定義されていた．ここでは，曲率は $n(t)$ の微分と考えることができることを述べる．

定義 1.7.1　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とし，$e(t) := c'(t)$ とおく．このとき，$\{e(t), n(t)\}$ を **Frenet 標構** と呼ぶ．

命題 1.7.2　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき次が成り立つ：$\forall t \in I$, $n'(t) = -\kappa_c(t)e(t)$.

問題 1.7.3（小テスト 2）　上の命題を示せ．

命題 1.6.4，1.7.2 を合わせて書くと，次のようになる．

命題 1.7.4（Frenet の公式）　$c : I \to \mathbb{R}^2$ を弧長パラメータ表示とする．このとき, Frenet 標構 $\{e(t), n(t)\}$ に対して，次が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} e & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Frenet の公式を用いることで，次を示すことができる．

定理 1.7.5（平面曲線の基本定理）　任意の C^∞-関数 $\kappa : I \to \mathbb{R}$ に対して，κ を曲率とする曲線の弧長パラメータ表示 $c : I \to \mathbb{R}^2$ が，向きを保つ合同を除いて一意的に存在する．

第 2 章

曲面の曲率

なめらかな曲面の曲率を定義し，その意味や性質を紹介する．

2.1　曲面の助変数表示

以下，D は $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合を表すものとする．

定義 2.1.1　写像 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ が なめらかな曲面 とは，以下が成り立つこと：

(i)　φ は C^∞ 級.

(ii)　$\forall (u, v) \in D$，$\mathrm{rank}\,(J\varphi)_{(u,v)} = 2$.

ここで $(J\varphi)_{(u,v)} := (\varphi_u, \varphi_v)_{(u,v)}$ は Jacobi 行列である（ただし φ_u，φ_v は偏微分を表す）．このとき，$\mathrm{rank}\,(J\varphi)_{(u,v)} = 2$ となるための必要十分条件は，$\{\varphi_u, \varphi_v\}$ が一次独立となること．

例 2.1.2　以下はなめらかな曲面である：

(1)　（xy 平面）$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u, v, 0)$.

(2)　（曲線の平行移動）$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ をなめらかな曲線としたとき，$\varphi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), v)$.

例 2.1.3　以下はなめらかな曲面でない：

(1)　(一点) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (0, 0, 0)$.

(2)　(曲線) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (x(u), y(u), z(u))$.

(3)　$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (u^3, u^2, v)$.

これらの例から分かるように，定義の条件 (ii) を「$(J\varphi)_{(u,v)}$ は零行列でない」とすると，条件が弱くなりすぎる．

2.2　回転面

なめらかな曲線が所定の条件をみたしているとき，それを回転させてなめらかな曲面を作ることができる．

命題 2.2.1　$c : I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto c(t) = (x(t), z(t))$ をなめらかな曲線とし，次をみたすと仮定する：$\forall t \in I$，$x(t) > 0$．このとき，次はなめらかな曲面である：

$$\varphi : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}.$$

上のように定義された φ を，曲線 c の <u>回転面</u> と呼ぶ．これは，c を xz 平面内の曲線だと思って，それを z 軸を中心に回転させたものに他ならない．

例 2.2.2　以下はなめらかな曲面である：

(1)　(円柱) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

(2)　(球面) $\varphi : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$.

(3)　(トーラス) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (\cos u(2 + \cos v), \sin u(2 + \cos v), \sin v)$.

これらの例は全て回転面である．上で与えた球面の助変数表示は，球面の一部しか表していないことに注意する（定義域を $\mathbb{R}^2$ に拡げたものは助変数表示にはならない）．

2.3　曲面の曲率の定義

なめらかな曲面の曲率を定義する．曲線の曲率は単位法ベクトルを用いて表すことができたが，曲面の曲率にも単位法ベクトルが登場する．

定義 2.3.1　$a = {}^t(a_1, a_2, a_3)$，$b = {}^t(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，次を ベクトル積 と呼ぶ：

$$a \times b := {}^t\left(\det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right).$$

定義より，$a \times b$ は a と b の両方に直交する．また，$a \times b = 0$ となるための必要十分条件は，a と b が一次従属となることである．

定義 2.3.2　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，次を φ の 単位法ベクトル と呼ぶ：

$$n(u, v) := \varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v) / |\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)|.$$

なめらかな曲面の定義より，$\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$ が成り立つことに注意する．

定義 2.3.3　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，

(1)　$E := \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$，$F := \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$，$G := \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ を 第一基本量 と呼ぶ．

(2)　$L := \langle \varphi_{uu}, n \rangle$，$M := \langle \varphi_{uv}, n \rangle$，$N := \langle \varphi_{vv}, n \rangle$ を 第二基本量 と呼ぶ．

(3)　以下をそれぞれ 第一基本行列，第二基本行列 と呼ぶ：

$$\widehat{\mathrm{I}} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathrm{II}} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

(4)　$A := \widehat{\mathrm{I}}^{-1}\widehat{\mathrm{II}}$ を 形作用素 と呼ぶ．

(5)　$K := \det(A)$ を ガウス曲率，$H := (1/2)\mathrm{tr}(A)$ を 平均曲率 と呼ぶ．

形作用素 A が定義されるためには，第一基本行列 $\widehat{\mathrm{I}}$ が逆行列をもつことを確かめなくてはならない．このことは，後で示す．

2.4　曲面の曲率の例

ここでは，いくつかの簡単な曲面に対して，そのガウス曲率と平均曲率を求める．

例 2.4.1　ガウス曲率 K，平均曲率 H について，以下が成り立つ：

(1)　平面に対して，$K=H=0$.

(2)　（半径 $r>0$ の円柱）$\varphi(u,v)=(r\cos u, r\sin u, v)$ に対して，

$$A=\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K=0, \quad H=-1/(2r).$$

(3)　（半径 $r>0$ の球面）$\varphi(u,v)=(r\cos u\cos v, r\sin u\cos v, r\sin v)$ に対して，$K=1/r^2$，$H=-1/r$.

問題 2.4.2（小テスト 3）　半径 $r>0$ の球面のガウス曲率と平均曲率を，上記の助変数表示を用いて，実際に計算せよ．

例 2.1.2 で紹介したように，曲線 c を z 軸方向に平行移動させることで曲面 φ を作ることができる．このとき，c の曲率と φ の曲率には次の関係がある．

命題 2.4.3　$c: I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t))$ を弧長パラメータ表示とし，その曲率を κ とする．また，$\varphi : I\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : (u,v) \mapsto (x(u), y(u), v)$ とおく．このとき，φ のガウス曲率と平均曲率は以下をみたす：$K=0$，$H=-\kappa/2$.

上記の弧長パラメータ表示に対して，Frenet の公式より

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}.$$

命題の証明にこれを用いると便利である．

2.5　第一基本量の意味：内積

ここでは第一基本量 E，F，G と内積の関係を述べる．以下，$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，$\langle , \rangle$ を $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積とする．

定義 2.5.1　各 $p \in D$ に対して，写像 $\mathrm{I}_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$\mathrm{I}_p(X, Y) := \langle (J\varphi)_p X, (J\varphi)_p Y \rangle.$$

定義より I_p は対称双線型写像である．さらに，$(J\varphi)_p$ が階数 2 （すなわち単射）であることから，次が従う．

命題 2.5.2　任意の $p \in D$ に対して，I_p は $\mathbb{R}^2$ 上の正定値内積.

ここで正定値性とは $\mathrm{I}_p(X, X) \geq 0$ であり, さらに等号成立は $X = 0$ に限ること．また, 内積は対称行列を用いて表すことができた．$\mathbb{R}^3$ の標準的な内積が $\langle X, Y \rangle = {}^t XY$ で与えられていることを用いると，次が得られる．

命題 2.5.3　任意の $p \in D$ および任意の $X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して，次が成り立つ：

$$\mathrm{I}_p(X, Y) = {}^t X \, \widehat{\mathrm{I}}_p \, Y.$$

ここで $\widehat{\mathrm{I}}_p$ は第一基本行列．内積 I_p が非退化であることから，次が得られる．

系 2.5.4　任意の $p \in D$ に対して，第一基本行列 $\widehat{\mathrm{I}}_p$ は逆行列を持つ.

さらに，上記の I_p の表示から，形作用素 A について以下の性質が導かれる．

系 2.5.5　任意の $p \in D$ に対して，以下が成り立つ：

(1)　A_p は内積 I_p に関して対称である．すなわち，任意の $X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して，次が成り立つ：$\mathrm{I}_p(AX, Y) = \mathrm{I}_p(X, AY)$.

(2)　特に，A_p は対角化可能であり，その固有値は実数である．

形作用素 A の固有値を φ の <u>主曲率</u> と呼び，それらを λ_1，λ_2 で表すことが多い．ガウス曲率は主曲率の積であり，平均曲率は主曲率の平均に他ならない．

2.6　曲率の性質：合同での不変性

曲線の曲率と同様に，曲面のガウス曲率および平均曲率は回転や平行移動で不変である．

定義 2.6.1　$\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，

(1)　φ_1 と φ_2 が <u>向きを保つ合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{SO}(3), \exists w \in \mathbb{R}^3 : \forall p \in D$，$\varphi_2(p) = g\varphi_1(p) + w$.

(2)　φ_1 と φ_2 が <u>合同</u> であるとは，次が成り立つこと：$\exists g \in \mathrm{O}(3)$，$\exists w \in \mathbb{R}^3 : \forall p \in D$，$\varphi_2(p) = g\varphi_1(p) + w$.

二つの曲面が向きを保つ合同であるならば，両者のガウス曲率と平均曲率はそれぞれ等しい．このことを次の手順で示す．

命題 2.6.2　$\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，それぞれに対応する量を E_i，F_i 等で表す．また，φ_1 と φ_2 が合同であるとし，$\varphi_2 = g\varphi_1 + w$ と表せるとする（$g \in \mathrm{O}(3)$，$w \in \mathbb{R}^3$）．このとき以下が成り立つ：

(1)　$E_2 = E_1$，$F_2 = F_1$，$G_2 = G_1$.

(2)　$n_2 = (\det g) g n_1$.

(3)　$L_2 = (\det g) L_1$，$M_2 = (\det g) M_1$，$N_2 = (\det g) N_1$.

(4)　$A_2 = (\det g) A_1$.

(5)　$K_2 = K_1$，$H_2 = (\det g) H_1$.

従って，合同ならばガウス曲率は等しく，平均曲率は符号を除いて等しい．向きを保つ合同ならば，ガウス曲率も平均曲率も等しい．証明は直接計算だが，例えば (2) の証明にはベクトル積の性質 $\langle a \times b, c \rangle = \det(a, b, c)$ を用いるとよい．

2.7　曲率の性質：パラメータ変換での不変性

曲線の曲率と同様に，曲面のガウス曲率および平均曲率はパラメータ変換で不変である．D，D' を $\mathbb{R}^2$ 内の空でない開集合とする．

定義 2.7.1　写像 $\xi : D' \to D$ が <u>正のパラメータ変換</u> であるとは，以下が成り立つこと：

(i) ξ は全単射.

(ii) ξ は C^∞ 級.

(iii) $\forall q \in D'$，$\det(J\xi)_q > 0$.

上記の条件 (iii) の符号を負にしたものを <u>負のパラメータ変換</u> と呼ぶ．これらは，曲面の向きを保つか反転させるかということに対応する．正と負のパラメータ変換をまとめて <u>パラメータ変換</u> と呼ぶ.

命題 2.7.2　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面，$\xi : D' \to D$ をパラメータ変換とする．このとき，$\varphi \circ \xi : D' \to \mathbb{R}^3$ もなめらかな曲面である.

ガウス曲率や平均曲率がパラメータ変換で不変であることを示すために，次の補題を用意する.

補題 2.7.3　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき以下が成り立つ：

(1) $\widehat{\mathrm{I}} = {}^t(J\varphi)(J\varphi)$.

(2) $L = -\langle \varphi_u, n_u \rangle$，$M = -\langle \varphi_u, n_v \rangle = -\langle \varphi_v, n_u \rangle$，$N = -\langle \varphi_v, n_v \rangle$.

(3) $\widehat{\mathrm{II}} = -{}^t(J\varphi)(Jn)$.

命題 2.7.4　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面，$\varphi' := \varphi \circ \xi : D' \to \mathbb{R}^3$ を正のパラメータ変換とし，それぞれに対応する量を A，A' 等で表す．このとき以下が成り立つ：

(1) $\widehat{\mathrm{I}}' = {}^t(J\xi)\,\widehat{\mathrm{I}}\,(J\xi)$.

(2) $n' = n \circ \xi$.

(3) $\widehat{\mathrm{II}}' = {}^t(J\xi)\,\widehat{\mathrm{II}}\,(J\xi)$.

(4) $A' = (J\xi)^{-1} A\,(J\xi)$.

(5) $K' = K$，$H' = H$.

問題 2.7.5（小テスト 4）　上の命題の (1), (3), (4) を示せ.

2.8　形作用素の意味：単位法ベクトルの微分

ここでは，なめらかな曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ の形作用素 A が，単位法ベクトル $n = n(u,v)$ の微分を表していることを述べる．そのために，まずは微分の定義を復習する．

定義 2.8.1　D を $\mathbb{R}^m$ 内の空でない開集合とし，$F : D \to \mathbb{R}^n$ を C^∞ 級写像とする．このとき，F の $p \in D$ での <u>微分</u> を次で定義する：

$$(dF)_p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : X \mapsto \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(F(p + tX) - F(p) \right).$$

微分は線型写像である．線型写像 $(dF)_p$ を標準的な基底に関して行列表示したものが，ヤコビ行列 $(JF)_p$ であった．

ここから，なめらかな曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を考える．単位法ベクトルを $n : D \to \mathbb{R}^3$ とし，その微分を $(dn)_{(u,v)}$ で表す．次は $\langle n, n \rangle = 1$ から従う．

補題 2.8.2　任意の $X \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\langle (dn)_{(u,v)}(X), n_{(u,v)} \rangle = 0$.

このことから，値域を制限して $(dn)_{(u,v)} : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{span}\{\varphi_u(u,v), \varphi_v(u,v)\}$ と考えることができる．補題 2.7.3 より $A = -(J\varphi)^{-1}(Jn)$ となるので, 次が得られる．

命題 2.8.3　$-(dn)_{(u,v)}(e_1, e_2) = -(n_u, n_v) = (\varphi_u, \varphi_v)A$.

従って形作用素 A は，単位法ベクトル n の微分を行列表示したものである．曲線の曲率が単位法ベクトルの微分を表していたが，同様のことが曲面の曲率に対しても言えたことになる．

2.9　第二基本量の意味：形作用素の双対

ここでは第二基本量と形作用素の関係を述べる．以下，$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とし，これまでに定義した記号をそのまま用いる．

定義 2.9.1　各 $p \in D$ に対して，写像 $\mathrm{II}_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$\mathrm{II}_p(X, Y) := \mathrm{I}_p(A_p X, Y).$$

このような II_p を，A_p の I_p に関する双対と言う．ここで，A_p は I_p に関して対称だったので，II_p は対称双線型写像である．ただし非退化とは限らない．

命題 2.9.2　任意の $p \in D$ および任意の $X, Y \in \mathbb{R}^2$ に対して，次が成り立つ：

$$\mathrm{II}_p(X, Y) = {}^t X \widehat{\mathrm{II}}_p Y.$$

ここで $\widehat{\mathrm{II}}_p$ は第二基本行列．従って第二基本量 L，M，N は，形作用素 A を行列で表した時の成分を表している．

2.10　曲面の内在的性質：等長写像

ガウス曲率と平均曲率の違いを説明するために，曲面に合同よりも弱い「等長的」という同値関係を導入する．曲面の合同は第一基本量と第二基本量を保っていたが，曲面が等長的であるとは，第一基本量のみを保つという性質で定義される．

定義 2.10.1　$(V_1, \langle , \rangle_1)$，$(V_2, \langle , \rangle_2)$ を内積空間（すなわち線型空間と内積の組）とする．このとき，線型写像 $f : (V_1, \langle , \rangle_1) \to (V_2, \langle , \rangle_2)$ が（内積空間としての）<u>等長写像</u> であるとは，次が成り立つこと：$\forall X, Y \in V_1$，$\langle X, Y \rangle_1 = \langle f(X), f(Y) \rangle_2$．

ここで，$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とすると，各 $p \in D$ に対して I_p が内積を与えていたことを思い出す．

定義 2.10.2　$\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$，$\varphi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，

(1)　$\xi : D_1 \to D_2$ が <u>微分同相写像</u> であるとは，以下が成り立つこと：ξ は全単射，C^∞ 級であり，ξ^{-1} も C^∞ 級．

(2)　$\xi : D_1 \to D_2$ が（曲面としての）<u>等長写像</u> であるとは，以下が成り立つこと：ξ は微分同相写像であり，$\forall p \in D_1$，$(d\xi)_p : (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_1)_p) \to (\mathbb{R}^2, (\mathrm{I}_2)_{\xi(p)})$ が内積空間としての等長写像．

このような等長写像が存在するときに，二つの曲面は <u>等長的</u> であると言う．

問題 2.10.3（小テスト 5）　$\varphi_1 : D \to \mathbb{R}^3$，$\varphi_2 : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき, φ_1 と φ_2 が合同ならば等長的であることを示せ．(以前に示した第一基本量などに関する命題を用いてよい.)

次の例より，平面と円柱は等長的である（平均曲率が違うので合同ではない）．

例 2.10.4　平面 $\varphi_1(u, v) := (u, v, 0)$ と円柱 $\varphi_2(u, v) := (r \cos u, r \sin u, v)$ を考える．ただし $r > 0$．このとき，次の ξ は φ_1 から φ_2 への等長写像である：

$$\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \mapsto ((1/r)x_1, x_2).$$

等長的という言葉は，第一基本量を保つことと，それを用いて定義される「距離」を保つことが同値であることから来ている．従って，「距離を完全に反映した世界地図を平面上に描け」という問題は,（地球を球面と同一視して）「球面から平面への等長写像を作れ」という問題だと考えることができる．— これが不可能であることを示すためには，等長的という関係で不変な性質が必要になる．

2.11　曲面の内在的性質：ガウスの驚異の定理

ここでは, 曲面のガウス曲率 K が内在的であるという「ガウスの驚異の定理」(Theorema Egregium) の主張を述べておく.

定理 2.11.1（ガウスの驚異の定理） $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面とする．このとき，ガウス曲率 K は第一基本量 E，F，G のみから決まる．

ガウス曲率は $K = \det(A)$，$A = \widehat{\mathrm{I}}^{-1}\widehat{\mathrm{II}}$ 等によって定義されていた．従って

$$K = \frac{LM - N^2}{EG - F^2}.$$

定理を示すためには，$LM - N^2$ が第一基本量 E，F，G のみから決まることを示せばよい．当然ながら，第二基本量 L，M，N それぞれは第一基本量からは決まらないことに注意する．証明は，一般のリーマン多様体を紹介した後に，その道具を使って行う．

第 3 章

リーマン多様体の曲率

多様体上のリーマン計量とは，各点での接空間に内積を与えるものである（すなわち，曲面の第一基本量のようなもの）．リーマン計量を備えた多様体をリーマン多様体と呼ぶ．この章では，曲面のガウス曲率を一般化して，リーマン多様体に曲率を定義する．曲率の定義と，基本的な性質と，いくつかの具体例を紹介することを目標とする．

以下，M を可微分多様体とする．本稿では，可微分多様体は全て有限次元 C^∞ 級実多様体を意味するものとする．

3.1　復習：接空間

ここでは，可微分多様体 M の $p \in M$ における接空間 T_pM を復習する．接空間は三通りの方法で表示することができる．

3.1.1　方向微分と接空間

可微分多様体の接空間を，方向微分を用いて定義する．まずは代数に関する復習．

定義 3.1.1　X を集合とし，$F(X) := \{\xi : X \to \mathbb{R}\}$ とおく．このとき，以下をそれぞれ $F(X)$ 上の <u>標準的な和</u>・<u>スカラー倍</u>・<u>積</u> と呼ぶ：各 $\xi, \eta \in F(X)$，$a \in \mathbb{R}$，$x \in X$ に対して，

$$\begin{aligned}(\xi+\eta)(x) &:= \xi(x)+\eta(x),\\ (a\xi)(x) &:= a\xi(x),\\ (\xi\eta)(x) &:= \xi(x)\eta(x).\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

命題 3.1.2　$F(X)$ は，上記の標準的な演算に関して代数（あるいは多元環）となる．

ここで，M 上の C^∞ 級関数の和・スカラー倍・積はまた C^∞ 級だった．従って次が

成り立つ.

命題 3.1.3　次は $F(M)$ 内の部分代数である：

$$C^\infty(M) := \{\xi : M \to \mathbb{R} : C^\infty \text{ 級 }\}. \tag{3.1.2}$$

以下，$C^\infty(M)$ には，この方法で得られる演算が備わっているものとする.

定義 3.1.4　$p \in M$ とする．このとき，$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が M の p における 接ベクトル または 方向微分 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ は線型.

(ii)　任意の $\xi, \eta \in C^\infty(M)$ に対して，$v(\xi\eta) = v(\xi)\eta(p) + \xi(p)v(\eta)$.

定義 3.1.5　$p \in M$ とする．このとき，次を M における p の 接空間 と呼ぶ：

$$T_pM := \{v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : p \text{ における方向微分 }\}. \tag{3.1.3}$$

命題 3.1.6　T_pM は $F(C^\infty(M))$ 内の線型部分空間．特に，T_pM は線型空間である.

3.1.2　速度ベクトルと接空間

接空間の二つ目の表示は，曲線の速度ベクトルを用いて与えられる．方向微分のときと同様に，$C^\infty(M)$ を本質的に用いる.

定義 3.1.7　$\varepsilon > 0$ とし，$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級写像とする．このとき，次の $c'(0)$ を c の 0 における 速度ベクトル と呼ぶ：

$$c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \tfrac{d}{dt}(\xi \circ c)(0). \tag{3.1.4}$$

C^∞ 級写像 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を，M 内のなめらかな曲線と呼ぶ．また，上記の $c'(0)$ を曲線の接ベクトルと呼ぶこともある.

命題 3.1.8　$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級写像とし，$p := c(0)$ とおく．このとき次が成り立つ：$c'(0) \in T_pM$.

3.1.3　座標近傍と接空間

接空間の三つ目の表示方法は，座標近傍を用いて与えられる．以下，(U, φ) を M の座標近傍とし，$p \in U$ とする．また，M の次元を m とし，$\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表す．このとき $x_i : U \to \mathbb{R}$ である.

定義 3.1.9 上記の記号の下で，写像 $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ を次で定義する：

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(\xi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)). \tag{3.1.5}$$

定義から，各 i に対して $(\frac{\partial}{\partial x_i})_p \in F(C^\infty(M))$ が成り立つ．よって，$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ 達の一次結合を考えることができる．

命題 3.1.10 以下が成り立つ：

(1) 任意の $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ に対して，$\sum a_i (\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ はある曲線の速度ベクトル．
(2) $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ は一次独立．

上の問題の (1) から，$(\frac{\partial}{\partial x_i})_p$ 達で張られる空間は，p における速度ベクトル全体の空間に含まれることが分かる．これら両者は実は等しい．すなわち，ここまでに接空間の三通りの表示方法を紹介してきたが，それらの表示は全て同等である．

定理 3.1.11 これまでの記号の下で，$\mathrm{span}\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$，速度ベクトル全体の集合，接空間 T_pM は全て一致する．従って特に T_pM は線型空間であり，その次元は M の次元と等しい．

3.2　ベクトル場

曲面の内在的性質を調べる際に，接ベクトル場 $X : D \to \mathbb{R}^3$ が登場した．これは，各点 $p \in D$ に対して，接ベクトル X_p を対応させるものであった．ここでは，その概念を拡張して，一般の可微分多様体 M に対してベクトル場を定義する．

3.2.1　微分作用素とベクトル場

ここでは，微分作用素によってベクトル場を定義する．ここで，$C^\infty(M)$ には和・スカラー倍・積の構造が入っていたことを思い出す．

定義 3.2.1　$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が ベクトル場 または 微分作用素 であるとは，以下が成り立つこと：

(i)　X は線型．

(ii)　任意の $\xi, \eta \in C^\infty(M)$ に対して，$X(\xi\eta) = (X\xi)\eta + \xi(X\eta)$．

M 上のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ で表す．$\mathfrak{X}(M)$ には，値域 $C^\infty(M)$ の演算を用いることで，次のような和と関数倍が定義される．

問題 3.2.2（小テスト 6）　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$，$f \in C^\infty(M)$ とする．このとき $X + Y, fX \in \mathfrak{X}(M)$ を示せ．ただしここで，$\xi \in C^\infty(M)$ に対して，

$$\begin{aligned}(X+Y)\xi &:= X\xi + Y\xi,\\ (fX)\xi &:= f(X\xi).\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

3.2.2　接ベクトルとベクトル場

ベクトル場は，各点に接ベクトルを与える対応として定式化することもできる．

命題 3.2.3　$X \in \mathfrak{X}(M)$，$p \in M$ とする．このとき，次で定義される X_p は $p \in M$ における接ベクトルである：

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto (X\xi)(p). \tag{3.2.2}$$

上の対応により，ベクトル場 X を次のような写像だと思うことができる：

$$X : M \to TM (:= \coprod_{p \in M} T_pM) : p \mapsto X_p. \tag{3.2.3}$$

これは，各 $p \in M$ に対して，接ベクトル $X_p \in T_pM$ を対応させるものである．

3.2.3　座標近傍とベクトル場

以下では，(U, φ) を M の座標近傍とし，$\varphi = (x_1, \ldots, x_m)$ と表す．

定義 3.2.4　$f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(U)$ に対して，$\sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ を次で定義する：

$$\sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TU : q \mapsto \sum f_i(q) (\tfrac{\partial}{\partial x_i})_q. \tag{3.2.4}$$

命題 3.2.5　$X \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$X : M \to TM$ の制限 $X|_U : U \to TU$ を考える．このとき次が成り立つ：$f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(U)$ を上手く選ぶと，

$$X|_U = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.2.5}$$

このような表示を X の局所座標表示と呼び，各 f_i をその成分と呼ぶ．

3.3　リーマン計量

ここでは，可微分多様体上のリーマン計量を定義する．リーマン計量は，可微分多様体の各接空間に内積を与えるものである．ちなみに，曲面の第一基本量に相当する．

3.3.1　線型代数の準備

ここでは，線型空間上の内積について準備をする．特に断らない限り V は n 次元実線型空間を表すものとする．

定義 3.3.1　次を V の 双対空間 と呼ぶ : $V^* := \{f : V \to \mathbb{R} : \text{線型}\}$.

命題 3.3.2　V^* は $F(V)$ の線型部分空間．従って特に，V^* は実線型空間である．

ここで，$F(V)$ は V 上の関数全体の成す代数を表していた．

命題 3.3.3　$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底とする．このとき，次で定義される $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ は V^* の基底である（これを 双対基底 と呼ぶ）:

$$\omega_i \in V^*, \quad \omega_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

これを踏まえて，内積を表すために，対称双線型写像の空間を考える．テンソルの記号を用いて表すが，テンソル空間の一般論にはここでは触れない．

定義 3.3.4　次を 対称双線型形式の空間 と呼ぶ :

$$S^2(V^*) := \{\Omega : V \times V \to \mathbb{R} : \text{双線型, 対称}\}.$$

問題 3.3.5（小テスト 7）　$S^2(V^*)$ は $F(V \times V)$ 内の線型部分空間であることを示せ．

定義 3.3.6　$\omega_1, \omega_2 \in V^*$ とする．このとき，次で定義される $\omega_1\omega_2 \in S^2(V^*)$ を ω_1, ω_2 の 対称テンソル と呼ぶ :

$$\omega_1\omega_2 : V \times V \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto (1/2)(\omega_1(X)\omega_2(Y) + \omega_2(X)\omega_1(Y)).$$

命題 3.3.7　$\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ を V^* の基底とする．このとき，$\{\omega_i\omega_j \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$ は $S^2(V^*)$ の基底である．

ここで，$\langle , \rangle$ を V 上の内積とすると，$\langle , \rangle \in S^2(V^*)$ であることに注意する．このことから，内積を基底の一次結合で書くことができる．

3.3.2　微分写像

接空間 T_pM 上の内積を表示するために，双対空間 T_p^*M の基底が必要である．ここでは微分写像の復習をし，局所座標を用いて T_p^*M の基底を与える．

定義 3.3.8　$F : M \to N$ を C^∞ 級写像とし，$p \in M$ とする．このとき，次で定義される $(dF)_p : T_pM \to T_{F(p)}N : v \mapsto (dF)_pv$ を F の p での 微分写像 と呼ぶ：

$$(dF)_pv : C^\infty(N) \to \mathbb{R} : \xi \mapsto v(\xi \circ F).$$

本稿では接ベクトルを方向微分によって定義したため，上を微分写像の定義とした．このとき T_pM の和とスカラー倍の定義から，次が従う．

命題 3.3.9　微分写像は線型である．

接ベクトルは，速度ベクトル $c'(0) \in T_pM$ によって表すことができた．この表示に関して，微分写像は次をみたす．

問題 3.3.10（小テスト 8）　$F : M \to N$ を C^∞ 級写像，$p \in M$ とし，$c'(0) \in T_pM$ を速度ベクトルとする．このとき次が成り立つ：

$$(dF)_p(c'(0)) = (F \circ c)'(0).$$

この命題の式を微分写像の定義としても良い．ただしその場合には，$(dF)_p(c'(0))$ が c の取り方に依らないことを示す必要がある．

命題 3.3.11　$F : M \to N$ を C^∞-級写像とし，$p \in M$ とする．また，p を含む M の座標近傍を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ とし，$F(p)$ を含む N の座標近傍を $(V, \psi = (y_1, \ldots, y_n))$ とする．このとき次が成り立つ：

$$(dF)_p(\sum a_i(\tfrac{\partial}{\partial x_i})_p) = (\sum b_j(\tfrac{\partial}{\partial y_j})_{F(p)}).$$

ただし，${}^t(b_1, \ldots, b_n) = J(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \cdot {}^t(a_1, \ldots, a_m)$.

特に，p を含む M の座標近傍を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ とすると，各 i に対して $x_i \in C^\infty(U)$ である．この x_i の微分写像 $(dx_i)_p \in T_p^*M$ は次をみたす．

命題 3.3.12　p を含む M の座標近傍を $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ とする．このとき，x_i の微分写像によって与えられる $\{((dx_1)_p, \ldots, (dx_m)_p\}$ は，$\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_p, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_m})_p\}$ の双対基底である．

3.3.3　微分形式

ここでは微分形式の簡単な紹介を行う．まずは，M の座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ 上の微分形式を考える．ベクトル場の時に登場した TM と同様に，次を考える（これを <u>余接束</u> という）：

$$T^*M := \coprod_{p \in M} T_p^* M.$$

定義 3.3.13　$f_i \in C^\infty(U)$ に対して，次のような ω を U 上の <u>1 次微分形式</u> と呼ぶ：

$$\omega := \textstyle\sum_{i=1}^m f_i dx_i : U \to T^*U : p \mapsto \sum_{i=1}^m f_i(p)(dx_i)_p.$$

ベクトル場 X は，各点 $p \in M$ に対して $X_p \in T_pM$ を与える対応であった．1 次微分形式 ω は，各点 $p \in M$ に対して $\omega_p \in T_p^*M$ を与える対応として定義される．

定義 3.3.14　写像 $\omega : M \to T^*M$ が M 上の <u>1 次微分形式</u> とは，以下が成り立つこと：

(i)　$\forall p \in M$，$\omega_p \in T_p^*M$.

(ii)　任意の座標近傍 (U, φ) に対して，$\omega|_U$ は U 上の 1 次微分形式.

1 次微分形式 ω_1，ω_2 に対して，前と同様の方法で対称テンソル $\omega_1\omega_2$ を定義することができる．このとき，定義域と値域を正確に書くと，次のようになる：

$$\omega_1\omega_2 : M \to S^2(T^*M) := \coprod_{p \in M} S^2(T_p^*M).$$

3.3.4 リーマン計量の定義

定義 3.3.15 多様体 M に対して, 次のような対応 g を **リーマン計量** と呼ぶ：各 $p \in M$ に対して，$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ は内積.

リーマン計量の定義域と値域を正確に述べると，$g : M \to S^2(T^*M)$ である．上の定義では各点に付いている内積が「バラバラ」でも良いことになるが，それでは困るので，通常は以下のような条件をみたすものを考える．

定義 3.3.16 M 上のリーマン計量 g が **U 上で C^∞** とは，次が成り立つこと：$\exists g_{ij} \in C^\infty(U)$ s.t. $g|_U = \sum g_{ij} dx_i dx_j$. また，全ての局所座標の上で C^∞ となるリーマン計量を **C^∞ 級リーマン計量** と呼ぶ.

以下では，リーマン計量は全て C^∞ 級のもののみを考えることとする．リーマン計量が与えられた多様体を **リーマン多様体** と呼ぶ.

例 3.3.17 $M := \mathbb{R}^n$ とする．このとき，$g = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ はリーマン計量である（これを **標準的なリーマン計量** と呼ぶ)．この g に関して次が成り立つ：

$$g_p(\sum a_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p, \sum b_i(\frac{\partial}{\partial x_i})_p) := \sum a_i b_i.$$

例 3.3.18 $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ とする．このとき，$g = (1/y^2)(dx^2 + dy^2)$ は M 上のリーマン計量である（これを **双曲計量** と呼び，得られるリーマン多様体 (M, g) を **双曲平面** と呼ぶ）.

例 3.3.19 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲線とするとき，その第一基本形式 I は D 上のリーマン計量である.

3.4　リーマン曲率

ここでは，リーマン多様体 (M, g) に対してリーマン曲率を定義する．その特別な場合として，曲面のガウス曲率は，第一基本形式から決まるリーマン計量に関する曲率を使って表すことができることを見る．このことから，曲面のガウス曲率は第一基本形式だけから決まるというガウスの驚異の定理が従う．

3.4.1　線型接続

ここでは多様体における線型接続の概念を紹介する．多様体 M のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ で表す．

定義 3.4.1　写像 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が 線型接続 であるとは，以下をみたすこと：

(1)　∇ は双線型;

(2)　$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in C^\infty(M))$;

(3)　$\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f \nabla_X Y \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in C^\infty(M))$.

これらの条件から，局所座標 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_n))$ の上では，線型接続は $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ によって決まることが分かる．ちなみに線型接続の一意性は成り立たない．

例 3.4.2　ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して，以下で定まる双線形写像 ∇ は線型接続:

$$\nabla_{f_i \frac{\partial}{\partial x_i}} (f_j \frac{\partial}{\partial x_j}) = f_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

なめらかな曲面の場合には，$\mathbb{R}^3$ の線型接続を用いて，以下のような線型接続を得ることができる．

例 3.4.3　$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ をなめらかな曲面，n を単位法ベクトル場とし，$M := \varphi(D)$ とおく（簡単のために M は自己交差はもたないとする）．このとき，以下で定まる双線形写像 ∇ は M 上の線型接続:

$$\nabla_X Y := (\nabla^{\mathbb{R}^n}_X Y)^\top := \nabla^{\mathbb{R}^n}_X Y - \langle \nabla^{\mathbb{R}^n}_X Y, n \rangle n.$$

ちなみに上の $^\top$ は接成分（曲面 M の接空間方向）をとることを意味している．同様の手続きは一般の部分多様体でも行うことができるが，その際に $\mathbb{R}^3$ の内積を使っていることに注意する．

3.4.2 ベクトル場の括弧積

先の線型接続について，一意性は成り立たないが，リーマン多様体の場合には「標準的な」線型接続が定義できる．その定義のためにベクトル場の括弧積が必要となる．ここではその定義を紹介する．ここで，多様体 M 上のベクトル場 X とは，方向微分 $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ のことと定義していた．

命題 3.4.4 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，次で定義される $[X,Y]$ もベクトル場である（これを X と Y の <u>括弧積</u> と呼ぶ）：

$$[X,Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f \mapsto X(Yf) - Y(Xf).$$

命題 3.4.5 ベクトル場の括弧積に対して次が成り立つ：

(1) $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ は双線型．
(2) $[X,Y] = -[Y,X]$.
(3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.
(4) $[X,fY] = (Xf)Y + f[X,Y] \quad (\forall f \in C^\infty(M))$.

問題 3.4.6（小テスト 9） 上の命題の (4) を示せ．

ベクトル場は，座標近傍 $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ に制限すると $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ の形で書くことができた．ベクトル場の括弧積を，この表示を用いて表すこともできる．

命題 3.4.7 $X = \sum \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，$Y = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{X}(U)$ の括弧積に対して，次が成り立つ：

$$[X,Y] = \sum_{i,j} \left(\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

よって特に次が成り立つ：$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$.

3.4.3　Levi-Civita 接続

ここでは，リーマン多様体上の標準的な線型接続の定義と特徴付けを紹介する．

定義 3.4.8　リーマン多様体 (M, g) に対して，次で定義される $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ を <u>**共変微分**</u> または <u>**Levi-Civita 接続**</u> と呼ぶ：

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]). \end{aligned}$$

上記の式を <u>**Koszul 公式**</u> と呼ぶ．ここで $Xg(Y, Z)$ は，X による $g(Y, Z) \in C^\infty(M)$ の微分である（ただしここで，$g(Y, Z) : M \to \mathbb{R} : p \mapsto g_p(Y_p, Z_p)$）．

命題 3.4.9　Levi-Civita 接続は線型接続である．

逆に，線型接続が Levi-Civita 接続になるための条件も知られている．

命題 3.4.10　線型接続 $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ が Levi-Civita 接続となるための必要十分条件は，以下をみたすこと：

(i)　$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

(ii)　$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

従って命題 3.4.10 の条件 (i)，(ii) をみたす線型接続 ∇ は一意的である．これを Levi-Civita 接続の定義とすることもある．

例 3.4.11　前に挙げた $\mathbb{R}^n$ 上の線型接続，またその接方向を取ることで得られた曲面上の線型接続は，いずれも Levi-Civita 接続である．

3.4.4　リーマン曲率

ここでは (M, g) をリーマン多様体とし，その曲率テンソルと断面曲率を紹介する．

定義 3.4.12　次で定義される R を (M, g) の リーマン曲率テンソル と呼ぶ：

$$R(X,Y)Z := \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_X Z.$$

この曲率は $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M) : (X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$ という写像であることに注意する．また，$[\nabla_X, \nabla_Y] := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X$ と略記して，次のように表すことも多い：

$$R(X,Y) := \nabla_{[X,Y]} - [\nabla_X, \nabla_Y].$$

補題 3.4.13　任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，以下が成り立つ：

(1)　R は多重線型写像．

(2)　$R(X,Y) = -R(Y,X)$.

(3)　$g(R(X,Y)Z, W) = -g(R(X,Y)W, Z)$.

(4)　$fR(X,Y)Z = R(fX,Y)Z = R(X,fY)Z = R(X,Y)(fZ)$　$(\forall f \in C^\infty(M))$.

補題の (1)，(2) の証明は自明. (3) の証明は, 命題 3.4.10 (ii) から従う. (4) の証明は, 括弧積の性質および命題 3.4.9 から従う.

命題 3.4.14　リーマン曲率テンソル R に対し，$(R(X,Y)Z)_p$ は X_p，Y_p，Z_p のみで決まる．すなわち，$X_p = X'_p$，$Y_p = Y'_p$，$Z_p = Z'_p$ ならば，$(R(X,Y)Z)_p = (R(X',Y')Z')_p$ が成り立つ.

上記のような性質をみたすものをテンソルと呼ぶ．例えば，リーマン計量 g はテンソルであるが，括弧積 $[,]$ や Levi-Civita 接続 ∇ はテンソルではない.

例 3.4.15　$\mathbb{R}^n$ に標準的なリーマン計量を入れたとき，$R \equiv 0$.

3.4.5　断面曲率

ここでは，断面曲率を紹介する．雑に言うと，断面曲率は，リーマン多様体を 2 次元平面で切ったときのガウス曲率である．

定義 3.4.16　σ を T_pM の 2 次元部分空間，$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とし，$\{X_p, Y_p\}$ が σ の正規直交基底であるとする．このとき σ の 断面曲率 を次で定義する：$K_\sigma = g(R(X,Y)X,Y)_p$．

断面曲率は σ だけに依存し，$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の取り方に依らない．このことは，リーマン曲率 R がテンソルであることから従う．

命題 3.4.17　断面曲率 K_σ は σ のみで決まる．すなわち，$\{X_p, Y_p\}$，$\{X'_p, Y'_p\}$ が共に $\sigma \subset T_pM$ の正規直交基底であるとき，$g(R(X,Y)X,Y)_p = g(R(X',Y')X',Y')_p$ が成り立つ．

問題 3.4.18（小テスト 10）　双曲平面 $\mathbb{R}\mathrm{H}^2$ の断面曲率は，任意の点において -1 であることを示せ．

断面曲率の計算には，例えば次のベクトル場を取ればよい：$X := y\frac{\partial}{\partial x}$，$Y := y\frac{\partial}{\partial y}$．このとき以下が成り立つ：$[X,Y] = -X$，$\nabla_X X = Y$，$\nabla_Y X = \nabla_Y Y = 0$．

3.4.6　ガウスの驚異の定理の証明

曲面のガウス曲率は第一基本形式 I にしか依存しない，というガウスの驚異の定理を，これまでに述べてきたリーマン多様体の概念を用いて証明する．

ここでは曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ を考え，$M = \varphi(D)$ とおく．以下では D と $\varphi(D)$ は適宜同一視する．$\mathbb{R}^3$ の標準的リーマン計量を $\langle , \rangle$ で表し，その Levi-Civita 接続を $\widetilde{\nabla}$ とする．単位法ベクトル n を用いて，曲面の Levi-Civita 接続は以下で与えられていたことを思い出す：

$$\nabla_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y - \langle \widetilde{\nabla}_X Y, n \rangle n \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)).$$

これを用いると，以下の公式を示すことができる．

命題 3.4.19　任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，次が成り立つ：

(1)　$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X, Y)n$　(Gauss の公式),

(2)　$\widetilde{\nabla}_X n = -A(X)$　(Weingarten の公式).

ただし, II は曲面の第二基本形式, A は形作用素を表す. これらを用いると, 曲面のリーマン曲率テンソル R は第二基本形式で表される.

命題 3.4.20　任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \mathrm{II}(X, Z)\mathrm{II}(Y, W) - \mathrm{II}(Y, Z)\mathrm{II}(X, W).$$

これを Gauss 方程式と呼ぶ. 証明には, $\mathbb{R}^3$ のリーマン曲率が 0 であることを用いる. 一般のリーマン部分多様体に対しても, リーマン曲率の差を第二基本形式で表す同様の公式がある.

定理 3.4.21（Gauss の驚異の定理）　曲面 $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ のガウス曲率と, リーマン多様体 $(\varphi(D), \mathrm{I})$ の断面曲率は一致する. よって特に, ガウス曲率は第一基本形式だけから決まる.

断面曲率は正規直交基底を選んで計算するが, 選び方に依存しないので, 形作用素 A の固有ベクトルになるようにして良い (A は対角化可能であった). 行列式 $\det(A)$ が固有値の積であることと, 先の Gauss 方程式から, 証明は従う.