MEMO

本稿は, 2024 年度の大阪公立大学理学部数学科 1 年生対象の「数学要論 A」の講義概要である．教科書は, 松坂和夫 (著)「集合・位相入門」を用いる．内容は, 以下の予定:

- 第 1 章「集合と写像」
- 第 2 章「集合の濃度」
- 第 3 章「順序集合, Zorn の補題」

講義の情報や配布プリントは HP で公開する:
`https://www.omu.ac.jp/sci/tamaru/lec/24yoron-a/`

大学の数学は, ほぼ全てが「集合」と「写像」と「論理記号」で書かれている．この講義の目的は, これらに関する基本を「身に付ける」ことである．ここで, 「理解する」ではなく「身に付ける」であることに注意する．数学において, 聞いただけで証明の読み書きができるようになる人は, ほとんどいない (自転車の運転やピアノの演奏と同様に)．手を動かして実際に書く, ということは, 特に大学初年次においては極めて重要である．

そのためにこの講義では, 「その場で採点する何度でも提出可能な小テスト」を一定頻度で行う．目的は, 証明の書き方の練習である．講義ではできるだけ見本になるような証明を書くように心掛けるので, それを見て, 自分で証明を書いて, さらにそれを添削してもらう, ということをやっていただく．これを通して, 証明の書き方, あるいは数学の言葉に慣れて, 使えるようになって欲しい．なお, 小テストとは別に, 恐らく通常と思われる方式で中間試験と期末試験を行う．

一つの勉強方法として, 以下の方法を推奨しておく．それは講義の内容をまとめたプリントの中で, 「再現推奨」と書かれたものの証明を自力で再現する, というものである．この再現推奨のものは, 基本的な内容であり, 証明を書く練習に適したものを選んでいる．(一方で, 非常に複雑で自力で証明するのは困難な命題もある．そういうものに取り組んでも良いか, 大きな負荷がかかる場合には十分な準備運動をすべきである.)

第 1 章

集合と写像

ここでは, これから数学を学ぶ上で基礎となる「集合」と「写像」と「論理」について, その基礎的な事項を解説する. なお, 以下の命題等のうち「再現推奨」と書かれたものは, 基本的なものなので, 証明を見ずに自力で証明を再現できるようになることが望ましいという意味である. 暗記せよという意味ではない.

1.1 集合の概念

1.1.1 集合と元

定義 1.1.1. 範囲のはっきりしたものの集まりを **集合** という. 集合の中に入っている個々のものを **元** または **要素** という.

集合 A に対して, a が A の元であることを $a \in A$ や $A \ni a$ で表す (元でないときは $a \notin A$). このことを, a は A に属する, a は A に含まれる, 等ともいう.

1.1.2 集合と記法

集合を表すときに, $\{a, b, c\}$ のように元を並べる表記 (外延的表記) と, 元の満たすべき条件あるいは性質を指定する $\{x \mid C(x)\}$ のような表記 (内延的表記) がある.

定義 1.1.2. 以下の集合は特定の記号で表す:

(1) $\mathbb{N} := \{x \mid x$ は自然数 $\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
(2) $\mathbb{Z} := \{x \mid x$ は整数 $\}$;
(3) $\mathbb{Q} := \{x \mid x$ は有理数 $\}$;
(4) $\mathbb{R} := \{x \mid x$ は実数 $\}$.
(5) $\mathbb{C} := \{x \mid x$ は複素数 $\}$.

集合の元は, 順番と重複は無視することに注意. 例えば $\{1,1,1,2,2\} = \{1,2\} = \{2,1\}$. 集合の元の条件が多い場合は, 例えば $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ のように書く. ちなみにこれは正の実数の集合 (半直線).

定義 1.1.3. $a, b \in \mathbb{R}$ が $a < b$ をみたすとする.

(1) $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (これを開区間という);

(2) $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (これを閉区間という).

不等号は $\leqq$ ではなく $\leq$ で表す. 開区間と $\mathbb{R}^2$ の元は紛らわしいので, 混乱する恐れがある場合は省略せずに書く. 例えば円板の内部は

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \tag{1.1}$$

定義 1.1.4. 元を全くもたない集合を **<u>空集合</u>** といい, $\emptyset$ で表す.

1.1.3　論理記号

ここで (教科書の順番を入れ替えて) 論理記号を紹介する. 全ての数学的な性質は, 以下の記号の組み合わせによって記述される, と言っても過言ではない.

定義 1.1.5. 記号 $\forall$ および $\exists$ を以下で定義する:

- 「$\forall \ldots$」で「全ての ... に対して」を表す.
- 「$\exists \ldots$」で「... が存在する」を表す.
- 「s.t.」あるいは「:」で「such that」を表す.

記号 $\forall$ は, 「全ての」の代わりに「任意の」と言うこともある. 「任意の = 好き勝手なもの = 自分が好きに決めて良い」ではないことに注意. 気持ち的には「任意の = 何が起ころうとも = 相手がどんな手を打ってきても」が近い.

例題 1.1.6. 集合 $M :=$ { この授業の履修者 } に対し, 次の意味と真偽を考えよ:

(1) $\forall x \in M$, x は 18 歳以上.

(2) $\forall x \in M$, x は男.

(3) $\exists x \in M : x$ は男.

(4) $\exists x \in M : x$ の身長は 2m 以上.

命題の証明の書き方に入る前に, 否定命題について説明する. 記号 $\forall$ や $\exists$ が含まれる命題は, 否定命題を作る際に注意が必要である. 具体例で考えると, 「全員 18 歳以上」の否定命題は「18 歳以上でない人がいる」. これを論理記号で書くと次のようになる.

例 1.1.7. 問題 1.1.6 のそれぞれの否定命題は, 次のようになる:

(1)' $\exists x \in M : x$ は 18 歳未満.

(2)' $\exists x \in M : x$ は女.

(3)' $\forall x \in M,\ x$ は女.

(4)' $\forall x \in M,\ x$ の身長は 2m 未満.

論理記号を使って書かれた命題は, 機械的に否定命題を作ることが出来る.

命題 1.1.8. 命題 (P) に対し, 次が成り立つ.

(1)「$\forall x \in M,\ (P)$ が成立」の否定命題は, 「$\exists x \in M\ \ \text{s.t.}\ (P)$ が成立しない」.

(2)「$\exists x \in M\ \ \text{s.t.}\ (P)$ が成立」の否定命題は, 「$\forall x \in M,\ (P)$ が成立しない」.

以下, いくつかの命題の真偽を判定する問題を挙げる. ここで真偽を判定するとは, 真か偽かを予想しそれを証明する, という意味である. ある命題が偽であることを示すには, その否定命題が真であることを示す必要がある.

例題 1.1.9. 集合 $J :=$ { グー, チョキ, パー } に対し, 次の命題の真偽を判定せよ:

(1) $\forall x \in J,\ x$ はグーに勝つ;

(2) $\exists x \in J : x$ はグーに勝つ;

(3) $\forall x \in J, \exists y \in J : y$ は x に勝つ;

(4) $\exists y \in J : \forall x \in J, y$ は x に勝つ.

上の (3), (4) から分かるように, 命題は並び順を変えると意味が変わる. 従って順番には気を付ける必要がある. そのため, 「前から順番に読む」ことと「証明も前から順番に行う」ことを強く意識して欲しい.

例題 1.1.10 (再現推奨)**.** A が開区間 $(0, 2)$ または半直線 $(0, +\infty)$ であるとする. このとき次の真偽を判定せよ:

(1) $\forall a \in A, a \leq 3$;

(2) $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq M$.

ちなみに, この例題の (2) の条件をみたすとき, A は **上に有界** であるという.

問題 1.1.11 (小テスト 1)**.** 次の集合 A が上に有界であるかどうかを予想し, それを定義に従って示せ: $A := \{-x^2 + 2x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : y = -x^2 + 2x + 1\}$.

1.1.4　集合の相等

同じ集合でも, 複数の表示方法があり得る. 集合 A, B が集合として等しいときに $A = B$ とかく. 例えば (前にも書いたが)

$$\{1, 1, 1, 2, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

集合が等しいことに関しては, 次の部分集合の項で詳しくみる.

定義 1.1.12. 命題 p, q に対して, 命題 $p \Rightarrow q$ (p ならば q) を次で定義する: p が正しいときに q も正しい.

命題 p が偽である場合には, $p \Rightarrow q$ は真である. 詳細は次頁.

1.1.5　部分集合

部分集合 $A \subset B$ という概念を定義する. 部分集合でないことは $A \not\subset B$ で表す. 今後, 部分集合であることや, 集合が等しいことを証明する機会が頻繁にある. 実際の証明の中身は, それぞれに応じて異なるが, その「形式」は全て同じである.

定義 1.1.13. 集合 A, B に対して, $A \subset B$ である (A が B の **部分集合** である) とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $a \in B$.

部分集合の定義「$\forall a \in A$, $a \in B$」は「$a \in A \Rightarrow a \in B$」と同値である. この場合にはどちらで書いても問題ないが, もっと長い命題のときには, 前者の方が間違いにくい.

注意 1.1.14. 集合 A ($\subset \mathbb{R}$) が上に有界であることの定義「$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A$, $a \leq M$」は, 「$\exists M \in \mathbb{R} : (a \in A \Rightarrow a \leq M)$」と同値である. これを括弧を使わないで単に並べると「$(\exists M \in \mathbb{R} : a \in A) \Rightarrow a \leq M$」と区別できないので, 注意が必要.

定義から分かるように, 部分集合は一致する場合を含む. 一致する場合を除外したい場合は $A \subsetneq B$ で表し, 真部分集合であるという.

定義 1.1.15. 集合 A, B に対して, $A = B$ である (集合として一致する) とは, 次が成り立つこと: $A \subset B$ かつ $A \supset B$.

注意 1.1.16. 空集合 $\emptyset$ は全ての集合 A の部分集合である. すなわち, $\emptyset \subset A$.

命題 1.1.17. 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ: $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.

1.2　集合の間の演算

1.2.1　論理の準備

命題 p, q を組み合わせてできる命題について述べておく．命題の真と偽を, 簡単のために T (true, 真) と F (false, 偽) で表す.

例 1.2.1. 命題 p, q の真偽に応じて, 命題 $p \Rightarrow q$ の真偽は次の表のようになる:

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

この表を真理値表という．命題 $p \Rightarrow q$ はこの表で定義されていると考えて良い．これ以外にも p と q を使った命題があるが, それらは真理値表で定義を与える.

定義 1.2.2. 命題 p, q に対して, 命題 $p \vee q$ (p または q), および $p \wedge q$ (p かつ q) を次で定義する:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	F

従って, 例えば p が真ならば $p \vee q$ も真である．すなわち $p \Rightarrow p \vee q$ は常に真である．また, 2 個の命題の真理値表が完全に一致するとき, それらの命題は同値である．例えば, $p \vee q$ と $q \vee p$ は同値．他には以下のような例がある．命題 p の否定命題を $\neg p$ で表す.

問題 1.2.3 (自習用)**.** 以下の命題が同値であることを真理値表を使って確かめよ:

(1) $p \Rightarrow q$ と $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ と $(\neg p) \vee q$;

(2) $\neg(p \vee q)$ と $(\neg p) \wedge (\neg q)$;

(3) $\neg(p \wedge q)$ と $(\neg p) \vee (\neg q)$;

(4) $(p \vee q) \vee r$ と $p \vee (q \vee r)$;

(5) $p \vee (q \wedge r)$ と $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

(6) $p \wedge (q \vee r)$ と $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

1.2.2　和集合

定義 1.2.4. 集合 A, B の <u>**和集合**</u> を次で定める:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

集合を A_1, A_2 だとすると, 和集合は次のように書くこともできる:

$$A_1 \cup A_2 = \{x \mid \exists i \in \{1, 2\} : x \in A_i\}.$$

命題 1.2.5 (再現推奨)**.** 集合 A, B に対して以下が成り立つ:

(1) $A \subset A \cup B$;

(2) $A \cup B = B \Rightarrow A \subset B$.

その他, 類似の性質が教科書で紹介されているので, (全ての証明をまじめに書く必要はないが) 適宜自習しておくと良い.

1.2.3　共通部分

定義 1.2.6. 集合 A, B の <u>**共通部分**</u> を次で定める:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

集合を A_1, A_2 だとすると, 共通部分は次のように書くこともできる:

$$A_1 \cap A_2 = \{x \mid \forall i \in \{1, 2\}, x \in A_i\}.$$

共通部分に関して, 和集合と同様のいくつかの性質が教科書で紹介されている．それらについては置いて, 共通部分と和集合が混在した性質について述べる.

命題 1.2.7 (分配律)**.** 集合 A, B, C に対して以下が成り立つ:

(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

1.2.4　差

定義 1.2.8. 集合 A, B の <u>**差集合**</u> を次で定める:

$$A - B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}.$$

問題 1.2.9 (自習用)**.**

(1) 次を示せ: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

(2) 次の等号の反例を具体的に挙げよ: $(A - B) - C = A - (B - C)$.

1.2.5 普遍集合

定義 1.2.10. X を集合, A を X 内の部分集合のとき, 差集合 $X - A$ を A の X 内での<u>**補集合**</u> という.

上のような場合に, X を普遍集合あるいは全体集合という. また, 普遍集合が指定されているとき, 補集合は A^c で表す.

命題 1.2.11 (de Morgan の法則)**.** X を全体集合, A, B を部分集合とするとき,

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

問題 1.2.12 (自習用)**.** 以下を示せ:

(1) $(A^c)^c = A$;

(2) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$;

1.2.6 集合系・巾集合

定義 1.2.13. 集合の集合, すなわち, 入っている個々のものが集合であるような集合を<u>**集合系**</u> という.

集合系は集合族と呼ばれることもある. 教科書では集合系と集合族を厳密に使い分けをしているので, この講義ではそれに従う. 集合族は後日に改めて扱う. 集合と集合系の区別は, 慣れるまで難しいかも知れないが, 数学では後々まで使う非常に重要なものである.

定義 1.2.14. 集合 X に対して, X 内の部分集合全体のつくる集合系を $\mathfrak{P}(X)$ で表し, X の <u>**巾集合**</u> という.

ちなみに $\mathfrak{P}$ は P であり, 巾集合の英語名 power set の頭文字. 巾集合は 2^X で表すこともある. 集合 X の元の個数を $\#X$ で表す.

例 1.2.15. 有限集合 X に対して, $\#\mathfrak{P}(X) = 2^{\#X}$. 例えば,

$$\mathfrak{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

1.2.7　集合系の和集合・共通部分

定義 1.2.16. 集合系 $\mathfrak{U}$ に対し, その **和集合** と **共通部分** を以下で定める:

(1) $\bigcup \mathfrak{U} := \bigcup_{A \in \mathfrak{U}} A = \{x \mid \exists A \in \mathfrak{U} : x \in A\}$;

(2) $\bigcap \mathfrak{U} := \bigcap_{A \in \mathfrak{U}} A = \{x \mid \forall A \in \mathfrak{U},\ x \in A\}$.

上で用いた和集合や共通部分の記号 $\bigcup_{A \in \mathfrak{U}} A$, $\bigcap_{A \in \mathfrak{U}} A$ は, 正しくは以下のように書くべきだが, (行間が乱れるのを防ぐために) 省略して書いたものである:

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{U}} A, \qquad \bigcap_{A \in \mathfrak{U}} A.$$

例 1.2.17. 集合系 $\mathfrak{U} := \{(0,1], [0,1), (0,2)\}$ に対して,

(1) $\bigcup \mathfrak{U} = (0,1] \cup [0,1) \cup (0,2) = [0,2)$;

(2) $\bigcap \mathfrak{U} = (0,1] \cap [0,1) \cap (0,2) = (0,1)$.

例 1.2.18 (再現推奨)**.** 以下が成り立つ:

(1) 集合系 $\mathfrak{U} := \{(n-1, n+1) \subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ に対して, $\bigcup \mathfrak{U} = \mathbb{R}$;

(2) 集合系 $\mathfrak{U} := \{(-a, a) \subset \mathbb{R} \mid a > 0\}$ に対して, $\bigcap \mathfrak{U} = \{0\}$.

問題 1.2.19 (小テスト 2)**.** 集合系 $\mathfrak{U} = \{[a, +\infty) \subset \mathbb{R} \mid a > 0\}$ に対して, 和集合 $\bigcup \mathfrak{U}$ が何になるかを予想せよ. また, 予想した集合が $\bigcup \mathfrak{U}$ の部分集合であることを示せ.

問題 1.2.20 (自習用)**.** 上の小テストの逆向きの包含も示せ.

1.3　対応・写像

集合から集合への対応と写像が教科書では説明されているが, ここでは写像のみを解説する. 対応については, 必要になったときに触れる.

1.3.1　2 つの集合の直積

定義 1.3.1. 集合 A, B に対して, 次を **直積集合** という:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^2$ と書く (通常の座標平面のこと). また, $\#A = m$, $\#B = n$ のとき, $\#(A \times B) = mn$ である. 例えば $A \times \emptyset = \emptyset$.

1.3.2　写像

写像を定義する.

定義 1.3.2. 集合 A から集合 B への **写像** とは, A の任意の元 $a \in A$ に対して B の元 $b \in B$ を 1 つ与える規則のこと.

写像は $f : A \to B$ で表し, その元の行き先を $a \mapsto f(a)$ で表すことが多い. 例えば実数に対して, 二乗する操作は $(f(x) = x^2)$ は写像だが, 二乗したらその数になるものを対応させる操作 $(f(x) = \pm\sqrt{x})$ は写像ではない.

定義 1.3.3. 写像 $f : A \to B$ に対して, A を **始集合** あるいは **定義域**, B を **終集合** あるいは **値域** という.

定義 1.3.4. 写像 $f, g : A \to B$ に対して, f と g が写像として等しいとは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A,\ f(a) = g(a)$.

例 1.3.5. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$ とする. このとき, A から B への写像は全部で 3^2 個, B から A への写像は全部で 2^3 個.

例 1.3.6. A, B を集合とすると, 以下が成り立つ:

(1) $b_0 \in B$ を固定し, 任意の $a \in A$ に対して $f(a) := b_0$ と定めると, $f : A \to B$ は写像 (これを **定値写像** という);

(2) 任意の $a \in A$ に対して $f(a) := a$ と定めると, $f : A \to A$ は写像 (これを **恒等写像** という).

1.3.3　写像のグラフ

写像に対してグラフという概念が定義される．関数のグラフの一般化である．

定義 1.3.7. 写像 $f : A \to B$ に対して，次を f の **グラフ** と呼ぶ:

$$G(f) := \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}.$$

逆に，直積集合 $A \times B$ の部分集合が然るべき条件をみたすとき，そこから写像が得られる．証明は教科書を参照 (復元推奨ではない)．

定理 1.3.8. 部分集合 $G \subset A \times B$ に対し，以下は同値:

(1) $\exists f : A \to B$ (写像) : $G = G(f)$;
(2) $\forall a \in A$, $\exists 1 b \in B$: $(a, b) \in G$.

ここで $\exists 1$ は「唯一つ存在する」を表す記号．同じことを $\exists!$ で表すこともある．

1.4　写像に関する諸概念

1.4.1　写像による像および原像

定義 1.4.1. 写像 $f : A \to B$ および $P \subset A$ に対し, 次を f による P の <u>**像**</u> という:

$$f(P) := \{f(a) \in B \mid a \in P\} = \{b \in B \mid \exists a \in P : b = f(a)\}.$$

定義 1.4.2. 写像 $f : A \to B$ および $Q \subset B$ に対し, 次を f による Q の <u>**原像**</u> (または <u>**逆像**</u>) という:

$$f^{-1}(Q) := \{a \in A \mid f(a) \in Q\}.$$

例 1.4.3. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$ とし, 写像 $f : A \to B$ を $f(1) = f(2) = x$ で定める. このとき以下が成り立つ:

(1) $f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(A) = \{x\}$;

(2) $f^{-1}(\{x\}) = f^{-1}(B) = \{1, 2\}$; $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

例 1.4.4. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ に対し, 以下が成り立つ:

(1) $f(\mathbb{R}) = f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$; $f((-1, 2)) = [0, 4)$;

(2) $f^{-1}((-1, 4)) = (-2, 2)$; $f^{-1}((1, 4)) = (-2, -1) \cup (1, 2)$.

以下では, 集合の間の演算と, 写像による像あるいは逆像の関係を調べる.

定理 1.4.5 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を写像とし, $P, P_1, P_2 \subset A$ とする. このとき

(1) $P_1 \subset P_2 \Rightarrow f(P_1) \subset f(P_2)$;

(2) $f(P_1 \cup P_2) = f(P_1) \cup f(P_2)$;

(3) $f(P_1 \cap P_2) \subset f(P_1) \cap f(P_2)$;

(4) $f(A - P) \supset f(A) - f(P)$;

(5) $f^{-1}(f(P)) \supset P$.

定理 1.4.6 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を写像とし, $Q, Q_1, Q_2 \subset B$ とする. このとき

(1) $Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow f^{-1}(Q_1) \subset f^{-1}(Q_2)$;

(2) $f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) = f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)$;

(3) $f^{-1}(Q_1 \cap Q_2) = f^{-1}(Q_1) \cap f^{-1}(Q_2)$;

(4) $f^{-1}(B - Q) = A - f^{-1}(Q)$;

(5) $f(f^{-1}(Q)) \subset Q$.

これらの定理の主張のうち, いくつかの証明は講義で紹介する. また, 等号が書かれていないもの, 例えば $f(P_1 \cap P_2) = f(P_1) \cap f(P_2)$ は, 一般には成立しない. その (できるだけ簡単な) 反例を考えることは良い練習になる.

問題 1.4.7 (自習用)**.** 上の 2 つの定理の主張を示せ (講義中に証明したものについても, 自力で復元して確認せよ). また, 定理の主張において等号が書かれていないものについては, 反例を挙げよ.

問題 1.4.8 (小テスト 3)**.** $f : A \to B$ を写像とし, $Q_1, Q_2 \subset B$ とする. このとき, 次の包含を講義と同じ方法で定義に従って示せ: $f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \supset f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)$.

問題 1.4.9 (発展)**.** 上の 2 つの定理の主張の "集合系版" を考え, 正しい場合には証明し, 正しくない場合には反例を挙げよ.

1.4.2　全射・単射・全単射

写像に対する全射・単射という概念を紹介する.

定義 1.4.10. 写像 $f : A \to B$ に対して,

(1) f が **全射** とは次が成り立つこと: $\forall b \in B, \exists a \in A : b = f(a)$;
(2) f が **単射** とは次が成り立つこと: $\forall a, a' \in A\ (f(a) = f(a')),\ a = a'$.
(3) f が **全単射** とは, 全射かつ単射であること.

注意 1.4.11. 写像 $f : A \to B$ に対して,

(1) f が全射であるための必要十分条件は, $f(A) = B$;
(2) f が単射であるための必要十分条件は, $\forall a, a' \in A$, "$a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$".

標語的に言うと, $f : A \to B$ が全射とは「B の元は全て A からくる」, 単射とは「違うものは違うところにいく」あるいはもっと雑にいうと「行き先がかぶらない」.

例 1.4.12. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ とする. このとき,

(1) A から B への写像は $2^3 = 8$ 個, うち全射は $2^3 - 2 = 6$ 個, 単射は存在しない;
(2) B から A への写像は $3^2 = 9$ 個, うち全射は存在ない, 単射は $3 \cdot 2 = 6$ 個.

このような集合の元の個数が小さい場合に, 写像を書き上げて全射あるいは単射であるかを確認することは, 慣れるための練習になる.

全射および単射という性質は, 逆像を使って表すこともできる.

注意 1.4.13. 写像 $f : A \to B$ に対して,

(1) f が全射であるための必要十分条件は, $\forall b \in B$, $\#f^{-1}(\{b\}) \geq 1$;
(2) f が単射であるための必要十分条件は, $\forall b \in B$, $\#f^{-1}(\{b\}) \leq 1$;
(3) f が全単射であるための必要十分条件は, $\forall b \in B$, $\#f^{-1}(\{b\}) = 1$.

以下は簡単な例あるいは関数などの例を調べたもの.

例 1.4.14. 任意の集合 A に対して, 恒等写像 $f : A \to A : a \mapsto a$ は全単射.

例 1.4.15. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について,

(1) $f(x) = x^3$ は全単射;
(2) $f(x) = x^3 - x$ は全射だが単射でない;
(3) $f(x) = e^x$ は全射でないが単射:
(4) $f(x) = x^2$ は全射でも単射でもない.

問題 1.4.16 (発展)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が多項式で与えられているとする. このとき, f が全射であるかどうかと, 多項式の次数の間の関係を考えよ.

問題 1.4.17 (発展)**.** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が狭義単調増加ならば単射であることを示せ. ただし, f が狭義単調増加とは, 次が成り立つこと: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 < x_2)$, $f(x_1) < f(x_2)$.

前回, 集合の間の演算と写像の像・逆像との関係を調べた. そのときにいくつか成立しない性質があったが, それらは写像が全射あるいは単射であることを仮定すると成立する.

命題 1.4.18 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を単射とし, $P, P_1, P_2 \subset A$ とする. このとき

(1) $f(P_1 \cap P_2) \supset f(P_1) \cap f(P_2)$;
(2) $f(A - P) \subset f(A) - f(P)$;
(3) $f^{-1}(f(P)) \subset P$.

命題 1.4.19 (復元推奨)**.** $f : A \to B$ を全射とし, $Q \subset B$ とする. このとき

(1) $f(f^{-1}(Q)) \supset Q$.

問題 1.4.20 (小テスト 4)**.** $f : A \to B$ を単射とし, $P \subset A$ とする. このとき次を定義に従って示せ: $f^{-1}(f(P)) \subset P$.