対称空間とカンドル入門

田丸 博士

大阪公立大学 / OCAMI

数学概論 A

2025/07/16

概要

あらすじ

- 対称空間: 幾何・代数・表現論 ··· で重要
- カンドル: 結び目の研究に登場する代数系
- 対称空間はカンドル
- 我々が行っている「対称空間論を参考にしたカンドルの研究」の一部を紹介

Note

- カンドルは様々な分野の研究と関連
- みなさんの分野とも (新たな) 関係あるかも

§ 1. 対称空間 - (1/4)

ここでは「集合としての対称空間」を紹介

Def. (対称空間)

(X, s) : **対称空間**
$:\Leftrightarrow$ X : 集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ であり,

- $\forall x \in X,\ s_x(x) = x;$
- $\forall x \in X,\ s_x^2 = \mathrm{id};$
- $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x.$

Note

「多様体としての対称空間」や「リーマン対称空間」がよくある

Ex. (ユークリッド空間)

$\mathbb{R}^n$ は次で対称空間: $s_x(y) = 2x - y.$

§ 1. 対称空間 - (2/4)

Ex. (球面)

S^n は次で対称空間: $s_x(y) = -y + 2\langle y, x\rangle x$.

問1: 示せ

Ex. (実グラスマン)

$G_k(\mathbb{R}^n) := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$: k-dim 部分空間$\}$
は "部分空間に関する折り返し" で対称空間.

例:
問2: $r_V \in O_n$ を使って示せ

Ex. (有向実グラスマン)

$G_k(\mathbb{R}^n)^\sim := \{V \subset \mathbb{R}^n \mid V$: 有向 k-dim 部分空間$\}$
は "向きも込めた折り返し" で対称空間.

向きが同じ: 基底の変換行列の行列式が正
例:

§ 1. 対称空間 - (3/4)

Prop.

G: **群**, K: **部分群**, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ $(\sigma^2 = \mathrm{id})$,
$K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$
$\Rightarrow$ G/K **は次によって対称空間**:
$s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$.

意味:
問3: 仮定「$K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$」はいつ使う？

Note

逆も「然るべき群が推移的に作用」するなら成立

Ex.

$G = \mathbb{R}^n$ **(加法群)**, $K = \{0\}$, $\sigma(g) = -g$
$\Rightarrow$ **通常の点対称** $(s_x(y) = 2x - y)$ **が得られる**

§ 1. 対称空間 - (4/4)

Ex. (有向実グラスマン)

$G = \mathrm{SO}_n$, K, σ から $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$, ただし

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathrm{SO}_k,\ \beta \in \mathrm{SO}_{n-k} \right\},$$

$$\sigma(g) := \begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_{n-k} \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_{n-k} \end{pmatrix}$$

Ex. (実グラスマン)

上の K を次に取り換えると $G_k(\mathbb{R}^n)$:

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_n \mid \alpha \in \mathrm{O}_k,\ \beta \in \mathrm{O}_{n-k} \right\}$$

§ 2. カンドル - (1/2)

カンドル: 結び目の研究を出自とする代数系

Def.

$(X, *)$ が **カンドル**
:⇔ X: 集合, $* : X \times X \to X$ であり,

- $\forall x \in X,\ x * x = x;$
- $\forall x, y \in X,\ \exists 1 z \in X\ :\ z * y = x;$
- $\forall x, y, z \in X,\ (x * y) * z = (x * z) * (y * z).$

Note

条件 2 は「$(*y) : X \to X$ が全単射」

Note

記号は $*$ 以外にもいろいろ...

- $x \triangleleft y,\ x^y,\ \ldots$

§ 2. カンドル - (2/2)

Note

上の三条件は, 結び目の Reidemeister 変形と対応

Def.

K: 有向結び目, D: その図式, $(X, *)$: カンドル
$f : \mathrm{arc}\,(D) \to X$ が **カンドル彩色**
$:\Leftrightarrow$ 交点と演算 $*$ が適合

Fact

カンドル彩色の個数は, 図式の取り方に依らない

§ 3. 関係 - (1/2)

Prop.

(X, s): 集合としての対称空間

$\Rightarrow$ $y * x := s_x(y)$ によって $(X, *)$ はカンドル

Def. (カンドルの言い換え)

(X, s) : カンドル

:$\Leftrightarrow$ X : 集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ であり,

- $\forall x \in X$, $s_x(x) = x$;
- $\forall x \in X$, s_x 全単射;
- $\forall x, y \in X$, $s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

Ex. (正四面体)

正四面体の頂点は「右 120° 回転」でカンドル

問4: 回転方向が入り混じったらダメを示せ

§ 3. 関係 - (2/2)

対称空間論の類似がいくつか成立. 例えば:

Prop.

G: **群**, K: **部分群**, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$

$\Rightarrow$ G/K **は次によってカンドル**:

$$s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)].$$

§ 4. 例 - (1/3)

面白い/特徴的なカンドルを作りたい.

Def

$f : (X, s^X) \to (Y, s^Y)$ が

- **準同型** :$\Leftrightarrow \forall x \in X,\ f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f$
- **同型** :$\Leftrightarrow$ 全単射, 準同型

注: s_x は同型写像

Def

- $\mathrm{Aut}\,(X, s)$: 自己同型群;
- $\mathrm{Inn}\,(X, s) := \langle s_x \mid x \in X \rangle_{\mathrm{gr}}$: 内部自己同型群

今回は「変換群が特徴的」なカンドルの話.

問題

以下をみたすカンドルを作れ:

- $\mathrm{Aut}\,(X, s)$: X に推移的 (大きい)
- $\mathrm{Inn}\,(X, s)$: 可換 (小さい)

§ 4. 例 - (2/3)

Def.

$A\ (\subset (X, s))$ が **部分カンドル**

$$:\Leftrightarrow \quad \forall a, b \in A,\ s_a^{\pm 1}(b) \in A$$

部分カンドルはカンドル.

Ex. (離散球面)

次は S^n 内の部分カンドル:

$$DS^n := \{\pm e_1, \ldots, \pm e_{n+1}\} \subset S^n$$

示す: 点対称が対角行列

Ex. (離散グラスマン (?))

次は $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ 内の部分カンドル:

$$DG(k, n) := \{\pm \mathrm{span}\,(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \mid i_1 < \cdots < i_k\}$$

例: $DG(2, 4)$ を具体的に
しかもグラフで表せる

§ 4. 例 - (3/3)

Thm

$G=(V,E)$: 単純グラフ
$e: V \times V \to \mathbb{Z}_2$: 隣接写像
$\Rightarrow$ $(X := V \times \mathbb{Z}_2, s)$: カンドル
ただし $s_{(v,a)}(w,b) := (w, b+e(v,w))$
$\mathrm{Inn}\,(X,s)$: 可換

問5: カンドルになることを示せ
問6: 内部自己同型群が可換を示せ

Note

この構成方法の一般化も知られている

問7: 自分の専門で, 対称空間あるいはカンドルと関係ありそうなことを書け
問8: 感想文