MEMO

本稿は, 2026 年度の大阪公立大学理学部数学科 1 年生対象の「数学要論 A」の講義概要である. 内容は集合・写像などの数学の基本事項だが, その目的は「数学の言葉の読み書きをできるようになる」ことである. これから数学科では, さまざまな数学を学ぶことになる. それらは全て「数学の言葉」で書かれている (あるいは説明される). その基本的な言葉に慣れていることは, 今後の学習に大きな影響を与える. この講義を通して, 基礎を身に付けることを目的とする.

この講義では, 「その場で採点する何度でも提出可能な小テスト」を一定頻度で行う. 目的は, 証明の書き方の練習である. 講義ではできるだけ見本になるような証明を書くように心掛けるので, それを見て, 自分で証明を書いて, さらにそれを添削してもらう, ということをやっていただく. これを通して, 証明の書き方, あるいは数学の言葉に慣れて, 使えるようになって欲しい. なお, 小テストとは別に, 恐らく通常と思われる方式で中間試験と期末試験を行う.

勉強方法として, 二つの方法を推奨しておく. 一つは, 証明や小テストの解答を「他人に (あるいは自分に) 説明しながら」書くことである. 証明の各ステップで, 何故ここでこれをやっているのか, ということを説明することは, 良い訓練となる. (可能であれば実際に他人に説明すると良い. それができない場合は, 頭の中で説明しながら証明を書いて欲しい.) もう一つの方法は, 簡単な証明を繰り返し書くことである. 講義の内容をまとめたプリントの中に, 「再現推奨」と書かれたものがある. この再現推奨のものは, 基本的な内容であり, 証明を書く練習に適したものを選んでいる. そのような問題について, 人に説明しながら証明を書く練習という「基本動作の確認」は, 数学の言葉を身に付ける上で極めて有効である.

第 1 章

集合と写像

ここでは, これから数学を学ぶ上で基礎となる「集合」と「写像」と「論理」について, その基礎的な事項を解説する. なお, 以下の命題等のうち「再現推奨」と書かれたものは, 基本的なものなので, 証明を見ずに自力で証明を再現できるようになることが望ましいという意味である. 暗記せよという意味ではない.

1.1　集合の概念

1.1.1　集合と元

定義 1.1.1. 範囲のはっきりしたものの集まりを 集合 という. 集合の中に入っている個々のものを 元 または 要素 という.

集合 A に対して, a が A の元であることを $a \in A$ や $A \ni a$ で表す (元でないときは $a \notin A$). このことを, a は A に属する, a は A に含まれる, 等ともいう.

1.1.2　集合と記法

集合を表すときに, $\{a, b, c\}$ のように元を並べる表記 (外延的表記) と, 元の満たすべき条件あるいは性質を指定する $\{x \mid C(x)\}$ のような表記 (内延的表記) がある.

定義 1.1.2. 以下の集合は特定の記号で表す:

(1) $\mathbb{N} := \{x \mid x$ は自然数 $\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
(2) $\mathbb{Z} := \{x \mid x$ は整数 $\}$;
(3) $\mathbb{Q} := \{x \mid x$ は有理数 $\}$;
(4) $\mathbb{R} := \{x \mid x$ は実数 $\}$.
(5) $\mathbb{C} := \{x \mid x$ は複素数 $\}$.

集合の元は, 順番と重複は無視することに注意. 例えば $\{1,1,1,2,2\} = \{1,2\} = \{2,1\}$. 集合の元の条件が多い場合は, 例えば $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ のように書く. ちなみにこれは正の実数の集合 (半直線).

1.1.3　論理記号

ここでは (教科書とは順番を入れ替えて) 論理記号を紹介する. 全ての数学的な性質は, 以下の記号の組み合わせによって記述される, と言っても過言ではない.

定義 1.1.3. 記号 $\forall$ および $\exists$ を以下で定義する:

- 「$\forall \ldots$」で「全ての ... に対して」を表す.
- 「$\exists \ldots$」で「... が存在する」を表す.
- 「s.t.」あるいは「:」で「such that」を表す.

記号 $\forall$ は, 「全ての」の代わりに「任意の」と言うこともある. 「任意の = 好き勝手なもの = 自分が好きに決めて良い」ではないことに注意. 気持ち的には「任意の = 何が起ころうとも = 相手がどんな手を打ってきても」が近い.

例題 1.1.4. 集合 $J :=$ { グー, チョキ, パー } に対し, 次の命題の真偽を判定せよ:

(1) $\forall x \in J$, x はグーに勝つ;

(2) $\exists x \in J : x$ はグーに勝つ;

(3) $\forall x \in J, \exists y \in J : y$ は x に勝つ;

(4) $\exists y \in J : \forall x \in J, y$ は x に勝つ.

上の (3), (4) から分かるように, 命題は並び順を変えると意味が変わる. 従って順番には気を付ける必要がある. そのため, 「前から順番に読む」ことと「証明も前から順番に行う」ことを強く意識して欲しい.

例題 1.1.5. 数列 $a_n = (n+2)/n$ に対して以下を示せ:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n > 100), |a_n - 1| < 0.03$;

(2) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N), |a_n - 1| < 0.001$.

問題 1.1.6 (小テスト 1)**.** 数列 $a_n = n/2$ に対して以下を示せ:
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N), a_n > 100$.

1.1.4　否定命題

ここでは論理記号を使って書かれた命題の否定命題について説明する.

例題 1.1.7. 集合 $M := \{$ この授業の履修者 $\}$ に対し, 次の意味と真偽を考えよ:

(1) $\forall x \in M,\ x$ は 18 歳以上.

(2) $\forall x \in M,\ x$ は男.

(3) $\exists x \in M : x$ は男.

(4) $\exists x \in M : x$ の身長は 2m 以上.

これらの命題の否定命題について考える. 具体例で考えると, 「全員 18 歳以上」の否定命題は「18 歳以上でない人がいる」. これを論理記号で書くと次のようになる.

例 1.1.8. 問題 1.1.7 のそれぞれの否定命題は, 次のようになる:

(1)' $\exists x \in M : x$ は 18 歳未満.

(2)' $\exists x \in M : x$ は女.

(3)' $\forall x \in M,\ x$ は女.

(4)' $\forall x \in M,\ x$ の身長は 2m 未満.

論理記号を使って書かれた命題は, 機械的に否定命題を作ることが出来る.

命題 1.1.9. 命題 (P) に対し, 次が成り立つ.

(1)「$\forall x \in M,\ (P)$ が成立」の否定命題は, 「$\exists x \in M$ s.t. (P) が成立しない」.

(2)「$\exists x \in M$ s.t. (P) が成立」の否定命題は, 「$\forall x \in M,\ (P)$ が成立しない」.

以下, いくつかの命題が偽であることの証明の例を挙げる. ある命題が偽であることを示すには, その否定命題が真であることを示す必要がある.

例題 1.1.10. 数列 $a_n = (-1)^n$ に対して以下の命題が偽であることを示せ:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n > 100),\ |a_n - 1| < 0.03$;

(2) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N),\ |a_n - 1| < 0.001$.

問題 1.1.11 (小テスト 2)**.** 数列 $a_n = (-2)^n$ に対して以下の命題が偽であることを示せ: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ (n > N),\ a_n > 100$.

1.1.5　集合の相等

同じ集合でも, 複数の表示方法があり得る. 集合 A, B が集合として等しいときに $A = B$ とかく. 例えば (前にも書いたが)

$$\{1,1,1,2,2\} = \{1,2\} = \{2,1\}.$$

集合が等しいことに関しては, 次の部分集合の項で詳しくみる.

定義 1.1.12. 命題 p, q に対して, 命題 $p \Rightarrow q$ (p ならば q) を次で定義する: p が正しいときに q も正しい.

命題 p が偽である場合には, $p \Rightarrow q$ は真である. 詳細は次頁以降.

1.1.6　部分集合

部分集合 $A \subset B$ という概念を定義する. 部分集合でないことは $A \not\subset B$ で表す. 今後, 部分集合であることや, 集合が等しいことを証明する機会が頻繁にある.

定義 1.1.13. 集合 A, B に対して, $A \subset B$ である (A が B の <u>部分集合</u> である) とは, 次が成り立つこと: $\forall a \in A$, $a \in B$.

部分集合の定義「$\forall a \in A$, $a \in B$」は「$a \in A \Rightarrow a \in B$」と同値である. この場合にはどちらで書いても問題ないが, もっと長い命題のときには, 前者の方が間違いにくい.

定義 1.1.14. 集合 A, B に対して, $A = B$ である (集合として一致する) とは, 次が成り立つこと: $A \subset B$ かつ $A \supset B$.

すなわち, 部分集合は一致する場合を含む. 一致する場合を除外したい場合は $A \subsetneq B$ で表し, 真部分集合であるという.

注意 1.1.15. 元を全くもたない集合を <u>空集合</u> といい, $\emptyset$ で表す. 空集合 $\emptyset$ は全ての集合 A の部分集合である. すなわち, $\emptyset \subset A$.

命題 1.1.16. 集合 A, B, C に対して, 次が成り立つ: $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば $A \subset C$.