

概要

I: カンドルの基礎事項

- 集合としての対称空間
- カンドル (対称空間の一般化)
- 付随する概念: 変換群
- 付随する概念: 不変量

II: カンドルの構成方法

- 部分カンドル
- グラフによる構成
- カンドル拡大の構成

Based on many joint works (particularly with students)

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

I-(1): 対称空間 - (3/5)

グラスマンが対称空間の証明 (i): 線型代数的

Prop.

$r_V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: 部分空間 V に関する折り返し

$\Rightarrow$ (1) $r_V \in O(n)$,

(2) $\forall g \in O(n), g \circ r_V = r_{g(V)} \circ g$.

Proof of (2): V 上と $V^\perp$ 上で一致すれば十分.

(復習: 条件 (S3)) $\forall x, y \in X, s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

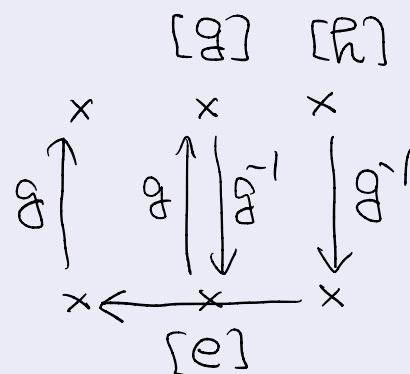
グラスマンが対称空間の証明 (ii): 群論的

Def. / Prop.

(G, K, σ) が 対称対

$\Leftrightarrow G$ 群, K 部分群, $\sigma \in \text{Aut}(G)$,
 $\sigma^2 = \text{id}, K \subset \text{Fix}(\sigma, G)$

$\Rightarrow G/K$ は次によって対称空間:
 $s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$.



意味: $s_{[e]}([h]) = [\sigma(h)]$, $s_{[g]} = \underbrace{g \circ s_{[e]} \circ g^{-1}}$.

I-(1): 対称空間 - (4/5)

Ex.

$G = \mathbb{R}^n$ (加法群), $K = \{0\}$, $\sigma(g) = -g$

$\Rightarrow$ 通常の点対称 ($s_x(y) = 2x - y$) が得られる

(Ex.) $s_x(y) = x\sigma(x^{-1}y) = x + \sigma(-x + y) = 2x - y$

Ex. (有向実グラスマン)

$G = SO_n$, K , σ から $G_k(\mathbb{R}^n) \sim$, ただし

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \in SO_k, \beta \in SO_{n-k} \right\},$$

$$\sigma(g) := \begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_{n-k} \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} I_k & \\ & -I_{n-k} \end{pmatrix}$$

構成されたものが $G_k(\mathbb{R}^n) \sim$ であることは次頁

Ex. (実グラスマン)

上の K を次に取り換えると $G_k(\mathbb{R}^n)$:

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix} \in SO_n \mid \alpha \in O_k, \beta \in O_{n-k} \right\}$$

I-(2): カンドル - (1/4)

カンドル: 結び目の研究を出自とする代数系

Def.

$(X, *)$ が **カンドル**

$:\Leftrightarrow X$: 集合, $*$: $X \times X \rightarrow X$ であり,

- $\forall x \in X, x * x = x$;
- $\forall x, y \in X, \exists! z \in X : z * y = x$;
- $\forall x, y, z \in X, (x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Note

- 条件 2 は「 $(*y) : X \rightarrow X$ が全単射」
- 記号は $*$ 以外にもいろいろ: $x \triangleleft y, x^y, \dots$
- 上の三条件は, 結び目の Reidemeister 変形と対応

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ↺ 🔍 ↻

I-(3): 変換群 - (1/3)

面白い/特徴的なカンドルを作りたい

アイデア 1: カンドルに付随する変換群が特徴的

Def

$f : (X, s^X) \rightarrow (Y, s^Y)$ が

- **準同型** : $\Leftrightarrow \forall x \in X, f \circ s_x^X = s_{f(x)}^Y \circ f$
- **同型** : $\Leftrightarrow$ 全単射, 準同型

注: s_x は同型写像

Def

- $\text{Aut}(X, s)$: 自己同型群;
- $\text{Inn}(X, s) := \langle s_x \mid x \in X \rangle_{\text{gr}}$: 内部自己同型群
- $G^0(X, s) := \langle s_x \circ s_y \mid x, y \in X \rangle_{\text{gr}}$
- $\text{Dis}(X, s) := \langle s_x \circ s_y^{-1} \mid x, y \in X \rangle_{\text{gr}}$

Prop.

$$\text{Dis}(X, s) \subset G^0(X, s) \subset \text{Inn}(X, s) \subset \text{Aut}(X, s)$$

$$(\because) s_x \circ s_y^{-1} = (s_x \circ s_y) \circ (s_y \circ s_y)^{-1} \in G^0(X, s). \quad \square$$

I-(4): 不変量 - (1/4)

目次

- 2-number
- オイラー標数
- s -可換数

これらの値が特別なカンドル？不変量同士の関係？

Def. (cf. Chen-Nagano)

カンドル (X, s) に対し

- $A (\subset X)$ **antipodal** : $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, s_x(y) = y$
- $\#_2(X, s) := \sup\{\#A \mid A: \text{antip.}\} : \textbf{2-number}$

Note: antipodal = 対蹠的

解釈: どのくらい大きな自明カンドルを含むか

Ex.

- $\#_2(S^n) = \#\{\pm e_1\} = 2$
- $\#_2(\mathbb{RP}^n) = \#\{[e_1], \dots, [e_{n+1}]\} = n + 1$

注: 極大対蹠集合の決定は難しい (e.g., in $G_k(\mathbb{R}^n) \sim$)

I-(4): 不変量 - (2/3)

Thm. (Chen-Nagano 1988)

M コンパクトリーマン対称空間

$$\Rightarrow \#_2(M) \geq \chi^{\text{top}}(M)$$

Conj. (Chen-Nagano)

M コンパクト連結リーマン対称空間

$$\Rightarrow \#_2(M) \equiv \chi^{\text{top}}(M) \pmod{2} ?$$

Ex.

$$\#_2(S^n) = 2 \geq \chi^{\text{top}}(S^n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ odd}) \\ 2 & (n \text{ even}) \end{cases}$$

Ex.

$$\#_2(\mathbb{R}P^n) = n + 1 \geq \chi^{\text{top}}(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ odd}) \\ 1 & (n \text{ even}) \end{cases}$$

これをカンドルでもやりたい
カンドルのオイラー標数??

II-(1): 部分カンドル - (2/4)

問題: 等質平坦カンドルを探せ

Ex. (離散球面)

標準球面 S^n 内:

- $DS^n := \{\pm e_1, \dots, \pm e_{n+1}\}$: 部分カンドル
- $\text{Inn}(DS^n)$ 可換
- DS^n は等質, 非連結

復習: $G^0(X, s) < \text{Inn}(X, s)$

Thm. (Kai-T. 2025+)

- $\chi^{\text{qdl}}(DS^n) = \chi^{\text{top}}(S^n)$

Prop.

- $\#_2(DS^n) = 2 = \#_2(S^n)$
- $\#_{\text{sc}}(DS^n) = 2(n+1) = \#_{\text{sc}}(S^n)$
- DS^n は S^n 内の極大 s -可換集合 (一意的)

II-(1): 部分カンドル - (3/4)

問題: もっと例を探せ

Recall

$G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ 内:

- $(i_1, \dots, i_k) := \text{span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$
- $s_{(1,2)}(1, 3) = \text{span}(e_1, -e_3) = -(1, 3)$

Ex. (離散グラスマン)

$G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ 内:

- $DG(k, n) := \{\pm(i_1, \dots, i_k)\}$: 部分カンドル
- $\text{Inn}(DG(k, n))$ 可換
- $DG(k, n)$ は等質, 非連結

注: $G_k(\mathbb{R}^n)$ で同じことをやると自明カンドル

Prop.

- $\#_2(DG(k, n)) = \#_2(G_k(\mathbb{R}^n)^\sim)$
- $n \neq 2k \Rightarrow DG(k, n)$ 極大 s -可換 in $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$

II-(1): 部分カンドル - (4/4)

問題

- 対称空間 M の良い部分カンドルを作れ
- 「部分カンドルの不変量 = M の不変量」
となるものがあるか？

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

II-(2): グラフによる構成 - (2/4)

一般にグラフがあればカンドル作れるのでは...

Thm. (Furuki-T. 2024)

$G = (V, E)$: 単純グラフ

$e : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_2$: 隣接写像

$\Rightarrow (X := V \times \mathbb{Z}_2, s)$: カンドル

ただし $s_{(v,a)}(w, b) := (w, b + e(v, w))$

意味: グラフの各頂点に $\mathbb{Z}_2$ を乗せた

Prop. (Furuki-T.)

単純グラフから構成されるカンドル (X, s) に対し

- $\text{Inn}(X, s)$: 可換
- (X, s) は非連結
- グラフが頂点推移的 $\Rightarrow (X, s)$ は等質

$\text{Inn}(X, s)$ が可換な等質カンドルを無限に作れた
(平坦よりも強い条件)

ただし全て対合的 (i.e., $s_X^2 = \text{id}$)

II-(2): グラフによる構成 - (3/4)

Def. (A -weighted digraph)

- V 集合, A 可換群
- $d : V \times V \rightarrow A$ with $d(x, x) = 0$ ($\forall x$)

このとき次の digraph を $\Gamma(V, d, A)$ とかく:

- 頂点: V の元
- 有向辺: $D := \{(x, y) \in V \times V \mid d(x, y) \neq 0\}$

Thm. (Saito-Sugawara 2025)

$\Gamma(V, d, A)$ に対し, 次の (X, s) はカンドル:

- $X := V \times A$
- $s_{(v, a)}(w, b) := (w, b + d(v, w))$

Thm. (Saito-Sugawara 2025)

- $(X, s): \Gamma(V, d, A)$ から構成したカンドル
 $\Rightarrow \text{Inn}(X, s)$ 可換
- 逆に $\text{Inn}(X, s)$ が可換なカンドルは全てこの方法で得られる

II-(2): グラフによる構成 - (4/4)

$\Gamma(V, d, A)$ の等質性は自然に定義...

Prop. (Saito-Sugawara 2025)

- $\Gamma(V, d, A)$: 等質
⇒ 構成したカンドルも等質
- 逆が成り立たない!
($\exists$ 内部自己同型群が可換な等質カンドル:
等質な $\Gamma(V, d, A)$ から構成できない)

復習: $G^0(X, s) < \text{Inn}(X, s)$

問題

- 等質平坦カンドルで Inn が非可換なものは？

A set of navigation icons typically found in Beamer presentations, including symbols for back, forward, search, and other slide controls.

II-(3): カンドル拡大 - (2/4)

観察

拡大 $\pi : X \rightarrow R_3$ について (X 正八面体):

- $(S^2, “\theta$ -回転”) はカンドル ($\forall \theta$)
- X は $(S^2, “90^\circ$ -回転”) の部分カンドル
($X = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$)
- π は $S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ (自然な射影) の制限

記号: $R(\theta)$: 角度 θ の回転行列

Ex.

$(S^2, “\theta$ -回転”) において: $s_{\pm e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ R(\pm\theta) \end{pmatrix}$

Rem.

$(S^2, “\theta$ -回転”) がカンドルである理由:

- $S^2 = G/K$, ただし $G := SO_3$,
 $K := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in SO_2 \right\} \cong SO_2$
- $\sigma(g) = s_{e_1} \circ g \circ s_{e_1}^{-1}$ とおくと,
 (G, K, σ) はカンドル組 (i.e., $K \subset \text{Fix}(\sigma, G)$)

SO_2 可換が効いてる. S^n ($n \geq 3$) ではできない.

II-(3): カンドル拡大 - (4/4)

カンドル構造が誘導されるための条件:

命題

(X, s) カンドル, $\pi : X \rightarrow Y$ 全射のとき

- $s'_{\pi(a)} : Y \rightarrow Y : \pi(b) \rightarrow \pi(s_a(b))$ well-defined

ならば Y にカンドル構造が誘導される

Rem.

- $\pi : (G_{n-2}(\mathbb{R}^n)^\sim, 90^\circ\text{-回転}) \rightarrow G_{n-2}(\mathbb{R}^n)$
はカンドル構造を誘導しない
- 制限 $\pi : (X, 90^\circ\text{-回転}) \rightarrow \pi(X)$ ならでできる

問題

- 他の対称空間で同様のことはできるか?
- 結び目に応用?

References

- Tamaru, H.: Two-point homogeneous quandles with prime cardinality, J. Math. Soc. Japan (2013)
- Kamada, S., Tamaru, H., Wada, W.: On classification of quandles of cyclic type, Tokyo J. Math. (2016)
- Ishihara, Y., Tamaru, H.: Flat connected finite quandles, Proc. Amer. Math. Soc. (2016)
- Kubo, A., Nagashiki, M., Okuda, T., Tamaru, H.: A commutativity condition for subsets in quandles — a generalization of antipodal subsets, In: Differential Geometry and Global Analysis (2022)
- Furuki, K., Tamaru, H.: Homogeneous quandles with abelian inner automorphism groups and vertex-transitive graphs, Internat. Elect. J. Geom. (2024)
- Tamaru, H.: 離散的な対称空間と quandle, In: Sugaku (数学), (2025)
- Tamaru, H.: Some properties of finite two-point homogeneous quandles, Springer Proc. Math. Stat. (to appear)
- Kai, R., Tamaru, H.: On the Euler characteristics for quandles, Internat. J. Math. (to appear)

Thank you!