# カンドルと対称空間

田丸 博士

大阪公立大学 / OCAMI

日本数学会幾何学分科会特別講演
(東京理科大学)
2026/03/26

# 0: 導入 - (1/2)

## Def. (Joyce (1982), Matveev (1982))

$(X, s)$ : カンドル quandle

$:\Leftrightarrow X$ : 集合, $s : X \to \mathrm{Map}(X, X)$ であり,

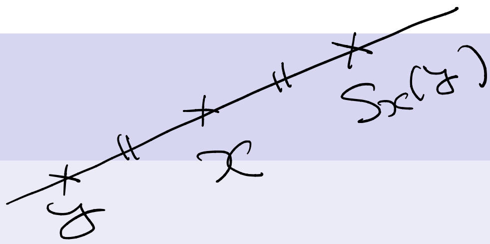
- $\forall x \in X,\ s_x(x) = x$;
- $\forall x \in X,\ s_x$ 全単射;
- $\forall x, y \in X,\ s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x$.

i.e. $s_x \circ s_y \circ s_x^{-1} = s_{s_x(y)}$

## Note

- 記号はいろいろ: $s_x(y) = y * x,\ y \triangleleft x,\ y^x,\ \ldots$
- 三条件は結び目の Reidemeister 変形と対応.

## Ex. (対称空間)




- 対称空間はカンドル
- 例: $\mathbb{R}^n$ に対し $s_x(y) = 2x - y$
- 例: 群 $G$ に対し $s_x(y) = xy^{-1}x$

## Ex. (群の共役演算)

- 群 $G$ は次でカンドル: $s_x(y) = x^{-1}yx$

# 0: 導入 - (2/2)

## プログラム

カンドルの研究の道筋（の一例）：

- 然るべきカンドルのクラスを設定;
- 該当するカンドルの構成;
- 該当するカンドルの性質;
- 該当するカンドルの分類.

## 本講演の目次

I: カンドル自身の研究

- 特徴的なカンドル
- カンドルの構成
- カンドルの不変量

II: カンドルの応用

- 概説
- 対称空間の研究への応用

# I-(1): 特徴的なカンドル - (1/3)

## Def.

$f : (X, s^X) \to (Y, s^Y)$ が

- **準同型**:$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $f \circ s^X_x = s^Y_{f(x)} \circ f$;
- **同型** :$\Leftrightarrow$ 全単射かつ準同型.

## Def. (いろいろな変換群)

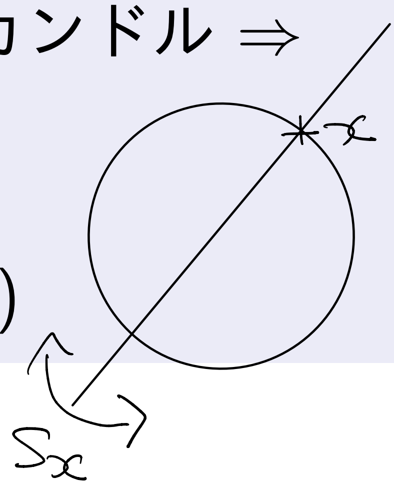
$\mathrm{Aut}\,(X, s) > \mathrm{Inn}\,(X, s) > G^0(X, s) > \mathrm{Dis}\,(X, s)$:

- $\mathrm{Inn}\,(X, s) := \langle s_x \mid x \in X \rangle_{\mathrm{gr}}$
- $G^0(X, s) := \langle s_x \circ s_y \mid x, y \in X \rangle_{\mathrm{gr}}$
- $\mathrm{Dis}\,(X, s) := \langle s_x \circ s_y^{-1} \mid x, y \in X \rangle_{\mathrm{gr}}$

## Ex.

$(S^1, s)$ 通常の点対称 (折り返し) のカンドル $\Rightarrow$

- $\mathrm{Aut}\,(S^1, s) = ???$
- $\mathrm{Inn}\,(S^1, s) = \mathrm{O}(2)$
- $G^0(S^1, s) = \mathrm{SO}(2) = \mathrm{Dis}\,(X, s)$



# I-(1): 特徴的なカンドル - (2/3)

ここでは「変換群が特徴的」なカンドルを考える

**Def. (変換群が大きい)**

カンドル $(X, s)$ が

- **等質** $:\Leftrightarrow \mathrm{Aut}\,(X, s) \curvearrowright X$ 推移的;
- **連結** $:\Leftrightarrow \mathrm{Inn}\,(X, s) \curvearrowright X$ 推移的.

**Def. (変換群が巨大)**

カンドル $(X, s)$ が

- **二点等質** $:\Leftrightarrow \mathrm{Inn}\,(X, s) \curvearrowright X$ 二重推移的.

($\curvearrowright X \times X - \mathrm{diag}$ 推移的)

**Note**

- 有限二点等質の分類; 有限体の原始根と対応 (T. 2013, Wada 2015, Vendramin 2017)
- "三点等質" $\Leftrightarrow R_3$ (二面体カンドル)
- **doubly homogeneous** $:\Leftrightarrow \mathrm{Aut}\,(X, s) \curvearrowright X$ 二重推移的 (Bonatto 2019)

# I-(1): 特徴的なカンドル - (3/3)

## Def. (変換群が小さい)

カンドル $(X, s)$ が

- **flat** :⇔ $G^0(X, s)$ が可換.
- **medial** :⇔ $\mathrm{Dis}\,(X, s)$ が可換;

## Note

- medial の研究 (Jedlička-Pilitowska-Stanovský-ZamojskaDzienio 2015)
- 有限連結平坦の分類 (Ishihara-T. 2016)
- 有限等質 $\mathrm{Inn}\,(X, s)$-可換の研究 (Furuki-T. 2024, Saito-Sugawara 2025 (後述))

## Note

他にも様々なカンドルのクラスがある:

- "付随群" が可換
- 冪零カンドル, 可解カンドル, ...

各々の研究の興味に応じたクラスを考えるとよい

# I-(2): 様々な構成方法 - (1/6)

構成 1: "対称空間 $\leftrightarrow$ 対称対" のカンドル版

**Thm. (Joyce 1982, cf., Ishihara-T. 2016)**

$G$ 群, $K$ 部分群, $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, $K \subset \mathrm{Fix}(\sigma, G)$

$\Rightarrow$ $G/K$ は次によって等質カンドル:
$s_{[g]}([h]) := [g\sigma(g^{-1}h)]$.

**Rem**

- 上のカンドルを $Q(G, K, \sigma)$ とかく;
- 全ての等質カンドルはこの方法で得られる.

**Def.**

- $Q(G, e, \sigma)$ を **一般化 Alexander カンドル**;
- $G$ が可換なものを **Alexander カンドル**.

**Ex.**

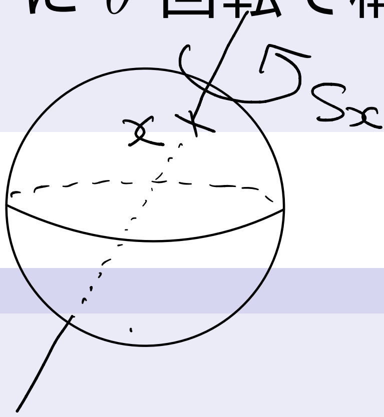
- $Q(\mathrm{SO}(2), e, -\mathrm{id})$ は円周 $S^1$ と同型;
- $Q(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, 0, -\mathrm{id})$ を **二面体カンドル**.

# I-(2): 様々な構成方法 - (2/6)

$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right\}$

## Ex.

- $(SO(3), SO(2), I_\theta)$ はカンドル組, ただし $I_\theta$ は $\theta$ 回転行列による共役
- 構成されたカンドルは $S^2$ に $\theta$ 回転で構造を入れたもの




構成 2: 部分カンドル

## Def.

$(X, s)$ カンドルとする. $A\ (\subset X)$ が **部分カンドル**

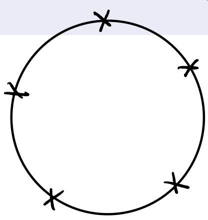
$:\Leftrightarrow \quad \forall a \in A,\ s_a^{\pm 1}(A) \subset A$

## Ex.

Rn

$S^1$ 上の $n$ 等分点の集合は, 通常のカンドル構造に関して部分カンドル (二面体カンドル)

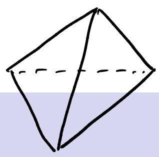
Rs

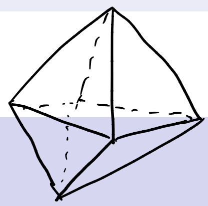


# I-(2): 様々な構成方法 - (3/6)

## Ex.

- 正四面体の頂点集合 $(\subset S^2)$ は, $S^2$ の $2\pi/3$-回転の構造に関して部分カンドル
- 正八面体の頂点集合 $(\subset S^2)$ は, $S^2$ の $\pi/2$-回転の構造に関して部分カンドル





## Note (準備)

有向実グラスマン $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ に対し

- "$s_V :=$ $V$ で向き込み折り返し" でカンドル
- $(x_1, \ldots, x_k) \in G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ と表記
- e.g., $s_{(e_1,e_2)}(e_1, e_3) = (e_1, -e_3) = -(e_1, e_3)$

## Prop (Furuki-T. 2024)

次は $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ の部分カンドル, 等質, $\mathrm{Inn}$-可換:

- $A(k,n)^\sim := \{\pm(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \mid i_1 < \cdots < i_k\}$

## Note

$A(k,n)^\sim$ の構造をグラフで書ける (後述)

# I-(2): 様々な構成方法 - (4/6)

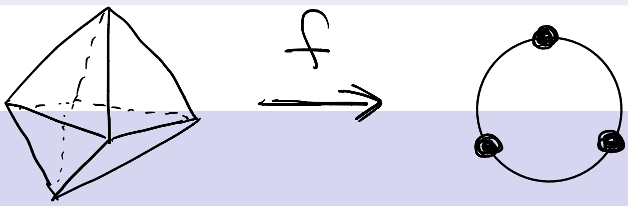
## Note (準備)

- $f : (X, s^X) \to (Y, s^Y)$ が カンドル拡大 :$\Leftrightarrow$ 全射, 準同型, 各点の逆像の位数が一定

## Ex. (Andruskiewitsch-Graña 2003)

対蹠点を同一視する次の写像はカンドル拡大:

- $f : (\text{正八面体}, \pi/2\text{-回転}) \to R_3$




## Thm (Kai-T.)

- $G_2(\mathbb{R}^n)^\sim$ は $\theta$-回転によってもカンドル
- $A(2, n)^\sim$ は $\pi/2$-回転に関して部分カンドル
- 射影 $\pi : G_2(\mathbb{R}^n)^\sim \to G_2(\mathbb{R}^n)$ は $A(2, n)^\sim$ からのカンドル拡大を誘導

$G_2(\mathbb{R}^3)^\sim \cong S^2 \supset A(2,3)^\sim = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$

## Note

- $A(2, n) := \pi(A(2, n)^\sim)$ に構造が誘導され, $\pi : A(2, n)^\sim \to A(2, n)$ カンドル拡大
- $n = 3$ のときは正八面体の例と一致

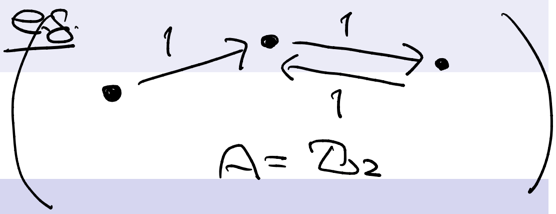
# I-(2): 様々な構成方法 - (5/6)

## 構成 3: グラフからの構成

### Def

$(X, A, d)$ が ***A*-weighted グラフ** :⇔

- $X$ 集合, $A$ 可換群, $d : X \times X \to A$ 写像
- $d(x, x) = 0$ $(\forall x \in X)$




### Thm (Saito-Sugawara 2025)

$(X, A, d)$ を $A$-weighted グラフとすると

- $X \times A$ は次によってカンドル:
  $s_{(x,a)}(y, b) = (y, b + d(x, y))$
- 構成されたカンドルは $\mathrm{Inn}$-可換
- $\mathrm{Inn}$-可換, 等質 ⇒ 全てこの方法で得られる

### Note

- $(X, A, d)$ "等質" ⇒ 上の $Q_{(X,A,d)}$ も等質
- 逆は不成立

# I-(2): 様々な構成方法 - (6/6)

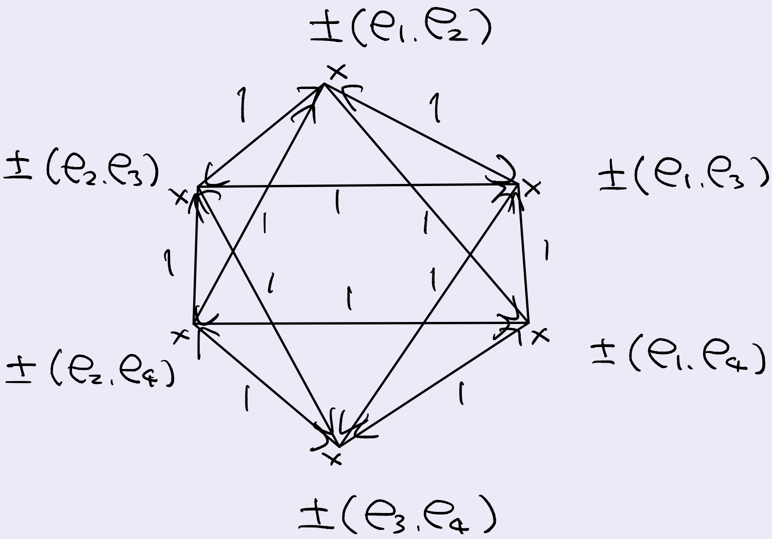
## Ex

- $X := \{x \subset \{1, 2, \ldots, n\} \mid \# x = k\}$
- $A = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$
- $d : X \times X \to A : (x, y) \mapsto \#(x - y) \pmod 2$

このとき, 得られるカンドルは $A(k, n)^{\sim}$ と同型

## Ex

$A(2, 4)^{\sim}$ を与えるグラフ:



# I-(3): カンドルの不変量 - (1/4)

**Note**

カンドルの定義から直ちに従う不変量:

- 元の個数, 点対称の位数
- 各点の点対称の軌道 (profile), ...
- $\mathrm{Inn}(X, s)$, $\mathrm{Dis}(X, s)$, ...

**Note**

結び目理論で研究されている不変量:

- カンドル (コ) ホモロジー (cf., Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito 2003)

ここでは対称空間由来の不変量を紹介

不変量 1: 2-number

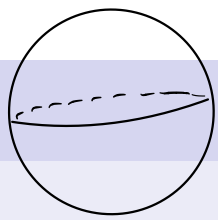
# I-(3): カンドルの不変量 - (2/4)

## Def (Chen-Nagano 1988)

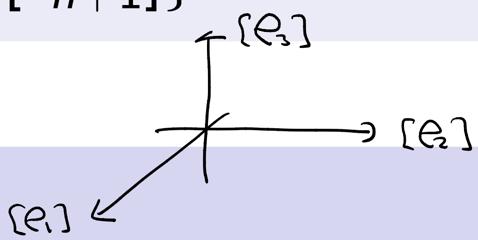
カンドル $(X, s)$ に対し

- $A\ (\subset X)$ **対蹠的** $:\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ s_x(y) = y$
- $\#_2(X, s) := \sup\{\#A \mid A\text{: 対蹠}\}$ : **2-number**

## Ex.



- $\#_2(S^n) = \#\{\pm e_1\} = 2$
- $\#_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \#\{[e_1], \ldots, [e_{n+1}]\} = n+1$




## Note

極大対蹠の決定は難しい場合も (e.g., in $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$)

## Thm. (Chen-Nagano 1988)

$M$ コンパクトリーマン対称空間

$\Rightarrow\quad \#_2(M) \geq \chi^{\mathrm{top}}(M)$

# I-(3): カンドルの不変量 - (3/4)

**Conj. (Chen-Nagano)**

$M$ コンパクト連結リーマン対称空間

$\Rightarrow \quad \#_2(M) \equiv \chi^{\mathrm{top}}(M) \pmod 2$ ?

**Ex.**

$$\#_2(S^n) = 2 \geq \chi^{\mathrm{top}}(S^n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ odd}) \\ 2 & (n \text{ even}) \end{cases}$$

**Ex.**

$$\#_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = n+1 \geq \chi^{\mathrm{top}}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \begin{cases} 0 & (n \text{ odd}) \\ 1 & (n \text{ even}) \end{cases}$$

**Question**

- $\#_2(X, s) = 1$ のカンドルはどのくらいある?
- 例: 有限二点等質 $\Rightarrow \#_2 = 1$
- 参考: コンパクトリーマン対称空間なら $\#_2 = 2 \Leftrightarrow$ 球面

# I-(3): カンドルの不変量 - (4/4)

### 不変量 2: カンドルオイラー標数

### Def. (Kai-T. 2025)

カンドル $(X, s)$ の **オイラー標数**:

- $\chi^{\mathrm{qdl}}(X, s) := \inf\{\#\mathrm{Fix}\,(f, X) \mid f \in \mathrm{Dis}\,(X, s)\}$

復習: $\mathrm{Dis}\,(X, s) = \langle\{s_x \circ s_y^{-1}\}\rangle_{\mathrm{gr}}$

### Prop. (Kai-T. 2025)

$M$ コンパクト連結リーマン対称空間

$\Rightarrow \quad \chi^{\mathrm{qdl}}(M) = \chi^{\mathrm{top}}(M)$

(証明) $\chi^{\mathrm{top}}(M) =$ max torus の固定点の個数

### Ex. $(S^n)$

n=6: $T = \begin{bmatrix} SO(2) & & \\ & SO(2) & \\ & & SO(2) \end{bmatrix}$

n=7: $T = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & SO(2) & & \\ & & SO(2) & \\ & & & SO(2) \end{bmatrix}$

- $\mathrm{Dis}\,(S^n) = \mathrm{SO}(n+1)$
- $n$ 奇数: $T = \mathrm{SO}(2)^{(n+1)/2}$, 固定点なし
- $n$ 偶数: $T = \mathrm{SO}(2)^{n/2}$, 2点を固定

# II-(1): 様々な応用 - (1/1)

- 群 (カンドルは群の共役演算の抽象化)
- 結び目、曲面結び目
- Hopf 代数
- set-theoretical Yang-Baxter 方程式
- 対称空間の一般化 (離散化)
- ...

**Note**

- カンドルの研究の動機がこれらから来る
- カンドルをこれらの分野に応用することも

# II-(2): 対称空間への応用 - (1/3)

## 応用例 1: 対蹠集合の決定

## Def. (再)

$A\ (\subset (X, s))$ 対蹠的 $:\Leftrightarrow \forall x, y \in A,\ s_x(y) = y$.

## Note

- 問題: 各 $(X, s)$ 内の極大対蹠集合の分類;
- リーマン対称空間でもいくつか未解決;
- 一般には "合同の下で一意" とは限らない;
- 特に $\mathrm{Spin}(n)$, $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$ は難.

## Recall

- $G_k(\mathbb{R}^n)^{\sim}$ 有向実グラスマン
- $A(k, n)^{\sim} := \{\pm(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \mid i_1 < \cdots < i_k\}$

# II-(2): 対称空間への応用 - (2/3)

## Thm (Tasaki 2013)

- $G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ 内の極大対蹠集合は, $A(k,n)^\sim$ 内の極大対蹠集合と 1:1 に対応.

## Note

- 有限カンドル $A(k,n)^\sim$ の問題に帰着された
- $A(k,n)^\sim$ の構造はグラフで分かるので, グラフの問題にも帰着
- 多くの $(n,k)$ に対して極大対蹠は決定済
- しかし完全な分類は未解決...

## Note

$G_k(\mathbb{R}^n)^\sim$ 内の極大対蹠集合の分類状況:

- $k=1$: 球面 (→ 分類は容易)
- $k=2$: Hermite (→ 一般論で片付く)
- $k=3$: 極大対蹠集合は一意でない

# II-(2): 対称空間への応用 - (3/3)

応用例 2 (に向けて): 2-number vs オイラー標数

## Conj. (Chen-Nagano) 再掲

$M$ コンパクト連結リーマン対称空間

$\Rightarrow \quad \#_2(M) \equiv \chi^{\mathrm{top}}(M) \pmod 2$ ?

## Plan

- $M$ コンパクト連結リーマン対称空間 $M$
  $\Rightarrow \exists A_M$ (有限部分カンドル):
  $\#_2(M) = \#_2(A_M)$, $\chi^{\mathrm{qdl}}(M) = \chi^{\mathrm{qdl}}(A_M)$?
- 上の $A_M$ はどのような性質をもつ?
- 有限カンドル $A$ が上の性質をもつ
  $\Rightarrow \#_2(A) \equiv \chi^{\mathrm{qdl}}(A) \pmod 2$ ?

# まとめ

## 本講演の目次

I: カンドル自身の研究

- 特徴的なカンドル
- カンドルの構成
- カンドルの不変量

II: カンドルの応用

- 概説
- 対称空間の研究への応用

## Comments

今回触れられなかった話題:

- 構造付きカンドル
  (位相カンドル, smooth カンドル, ...)
- カンドル上の距離 ($\leftrightarrow$ 幾何群論)
- カンドルの埋め込み
- ...

Thank you!