ジャンプ拡散過程の長時間挙動

大阪市立大学　理学研究科　数物系専攻　後期博士課程3年　甲斐　大貴

研究内容

リーマン多様体上に、マルコフ過程を構成しその挙動を研究する。

リーマン多様体……曲がった空間（例　球面、上半平面、トーラス）
マルコフ過程……未来の状態の確率が過去の情報に依存せず、現在の状態のみによって決定する。（例　ランダムウォーク、ブラウン運動）
長時間挙動
●既約性……任意の領域に侵入する確率が０ではない。（どこにでも行くことができる）
●再帰性……任意の領域に無限回侵入する。
●過渡性……任意の領域に有限回しか侵入しない。
●保存性……有限時間内で無限遠点に発散しない。

設定

1. M……向き付可能で連結な完備リーマン多様体（m次元）
2. $\hat{M} = M \cup \{\partial_M\}$……一点コンパクト化
3. $O(M)$……正規直交枠束
4. $\pi : O(M) \to M$……射影
5. $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot) : M \times M \to [0,\infty)$……距離関数
6. $r(\cdot) := \mathrm{dist}(o,\cdot)$
7. K……断面曲率
8. $\{B_t = (B_t^1, \cdots, B_t^m);\ 0 \le t < \infty\}$……Brown 運動
9. $\nu(dz)$……Lévy 測度　つまり　$\int_{\mathbb{R}_0^m} (1 \wedge |z|^2)\nu(dz) < \infty$を満たす測度
10. $N(dz,ds)$……Poisson random 測度、$\widetilde{N}(dz,ds) := N(dz,ds) - \nu(dz)ds$
11. $\{U_t \in O(M);\ 0 \le t < e\}$……水平Lévy過程，　水平Lévy過程が満たす確率微分方程式

$$dU_t = \sigma \sum_{i=1}^{m} H_i(U_{t-}) \circ dB_t^i + \eta \int_{|z|\le 1} \left(\Xi_1^z(U_{t-}) - U_{t-}\right)\widetilde{N}(dz,ds) + \kappa \int_{|z|>1} \left(\Xi_1^z(U_{t-}) - U_{t-}\right)N(dz,ds)$$

12. $\{X_t := \pi U_t \in M;\ 0 \le t < e\}$

$e := \inf\{t > 0;\ X_t = \partial_M\}$……爆発時刻
$T_D := \inf\{t > 0;\ X_t \in D\}$……First hitting time
$\sigma_D := \sup\{t > 0;\ X_t \in D\}$……Last exit time

定義

既約性……$\mathbb{P}_x[T_D < \infty] > 0,\ \forall x \in M$
再帰性……$\mathbb{P}_x[\sigma_D = \infty] = 1,\ \forall x \in M$
過渡性……$\mathbb{P}_x[\sigma_D < \infty] = 1,\ \forall x \in M$
保存性……$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1,\ \forall x \in M$

仮定

1. $\nu(dz)$は回転対称
2. $\nu(dz) = h(z)dz$と表せ、hは連続かつ$h > 0$。
3. X_tに密度関数$p(t,x,y)$が存在する。つまり、$\mathbb{P}_x[X_t \in D] = \int_D p(t,x,y)\mathrm{Vol}(dy)$。
4. $p(t,x,y)$が$x \in M$についてC^2級で、かつ
   $|\nabla_x \log p(t,x,y)| \le G_1(t,y),\quad |\nabla_x \nabla_x \log p(t,x,y)| \le G_2(t,y)$　を満たす$y \in M$に関する可積分関数が存在する。
5. 負の定数$\beta < 0$が存在し、$K < \beta$を満たす。
6. 負の定数$\alpha, \beta < 0$が存在し、$\alpha \le K \le \beta$を満たす。

主結果

補題1.
仮定1,2,3,5を満たすとする。正の定数$C_1 > 0$が存在して、$r(X_t) \ge r(x) + W_t + M_t + C_1 t$ が全ての$t \ge 0$で成り立つ。ただし、$W_t := \int_0^t \langle \nabla r(X_{s-}), dB_{s-} \rangle$,

$M_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \{r \circ \xi_{U_{s-}z}(X_{s-}) - r(X_{s-})\}\widetilde{N}(dz,ds)$ である。

補題2.
仮定1,2,3,4を満たすとする。$j(x) = \mathbb{P}_x[e = \infty]$と定義する。このとき、$j$は次のうちどれか一つを満たす。
(i)　$j = 1$
(ii) $j = 0$
(iii) $0 < j < 1$

補題3.
仮定1,2,3,6を満たすとする。$\delta > 0$を固定する。$\tau := \inf\{t > 0;\ r(X_t) \le 2\delta\}$とする。正の定数$C_2 > 0$が存在して、$r(X_t) \le r(x) + W_t + M_t + C_2 t$　が全ての$t < e \wedge \tau$で成り立つ。

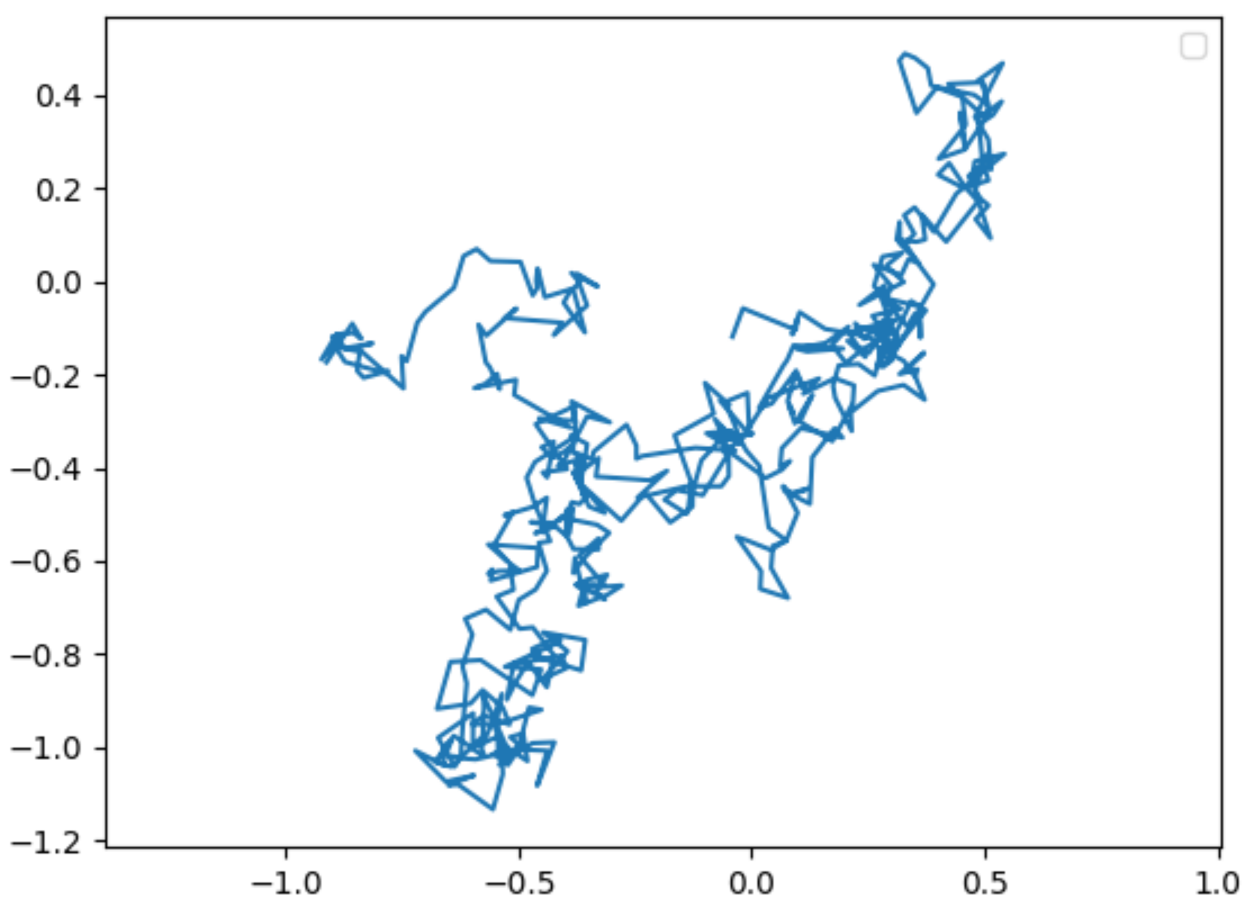
定理1.
仮定1,2のもと、$\{X_t\}$は既約的である。

定理2.
仮定1,2,3,5のもと、$\{X_t\}$は過渡的である。

定理3.
仮定1,2,3,4,6のもと、$\{X_t\}$は保存的である。

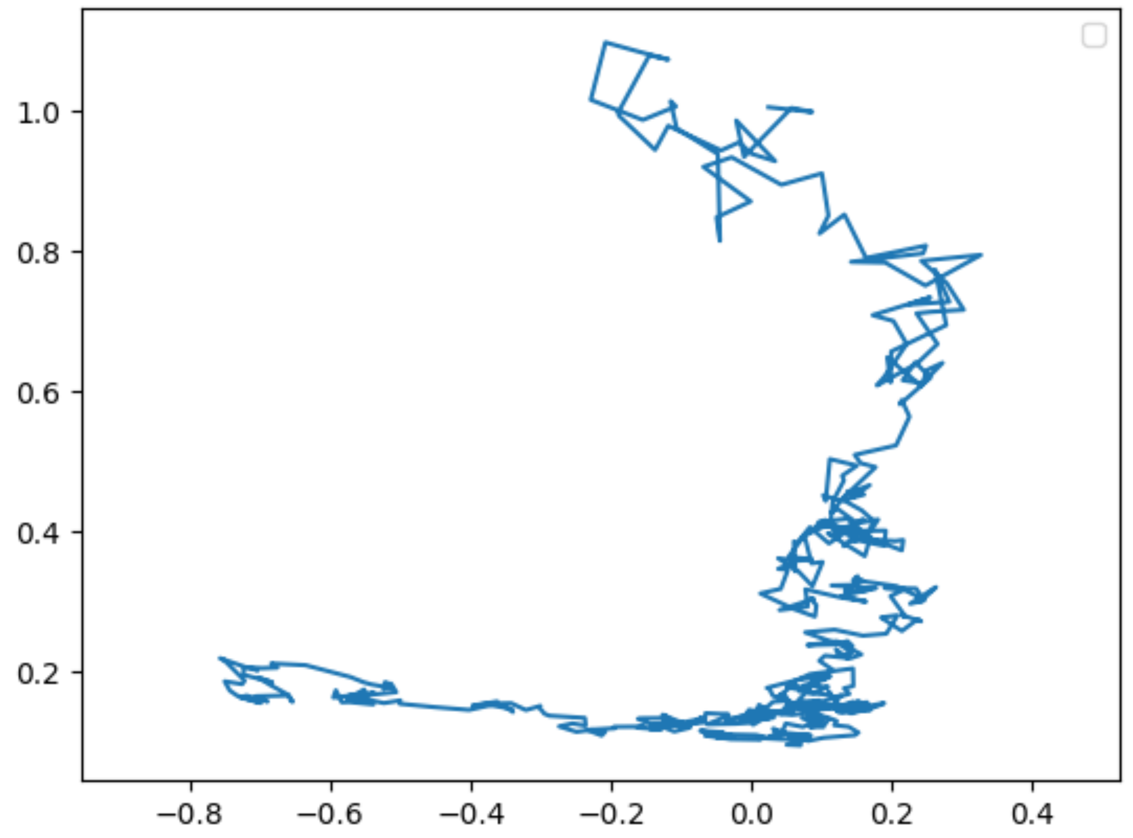
応用

ユークリッド空間上のBrown運動のpythonによるシミュレーション



応用

ポアンカレの上半平面上のBrown運動、計量：$ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$、※$K = -1$の一例




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#import seaborn as sns
T=1
N=2**9
dt=T/N
t=np.arange(0,T,dt)
dW=np.sqrt(dt)*np.random.randn(N)
W=np.cumsum(dW)
dB=np.sqrt(dt)*np.random.randn(N)
B=np.cumsum(dB)
a=(1/2)*B-t/4
b=W
#X=np.exp(a)*(b/a)*np.sinh(a)
#Y=np.exp(2*a)
X=B
Y=W
plt.axes().set_aspect('equal', 'datalim')
plt.plot(X,Y)
plt.legend()
plt.show()
```

References

[1]Applebaum, D. and Estrade, A.: Isotropic Lévy processes on Riemannian manifolds,　Ann.Probab.**28**(2000), 166–184.
[2]Bismut, J. M.: Large Deviations and the Malliavin Calculus. Birkhäuser, Boston (1984).
[3]Fujiwara, T., Kunita, H.:Stochastic differential equations of jump type and Lévy processess in diffeomorphisms group. J. Math. Kyoto. Univ. **25** (1985), 71-106.
[4]Hsu, E. P.:Stochastic analysis on manifolds. Graduate Studies in Mathematics. **38** (2002), American Mathematical Society.
[5]Ichihara, K.: Curavature, geodisics and the Brownian motion on a Riemannian manifold. I. Reccureence properties, Nagoya Math. J. **87** (1982), 115-125.
[6]Kai,H. and Takeuchi,A.:Gradient formulas for jump process on manifolds,Electron. J. Probab.**26**(2021), article no. 1, 1–15.
[7]Takeuchi, A.:Bismut-Elworthy-Li-type formulae for stochastic differential equations with jumps. J. Theoret. Probab. **23**(2010), 576-604.