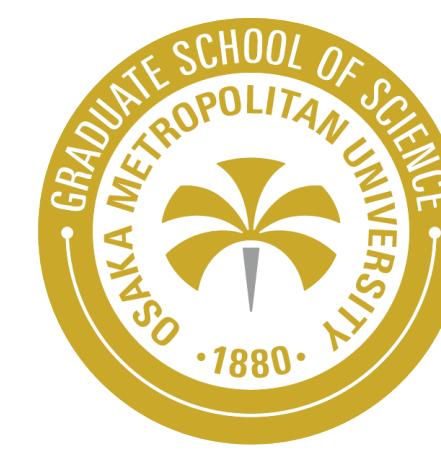


$\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き対称性の数理

高次次数付き対称性から超空間・可積分系・場の理論へ

伊藤 蓮 大阪公立大学大学院理学研究科



1. イントロダクション

素粒子論や数理物理において、対称性は理論の構造を決定する基本原理である。通常の超対称性では、ボソンとフェルミオンを区別する $\mathbb{Z}_2$ 次数を導入し、Lie 代数を Lie 超代数へ拡張する。

本研究では、この次数を

$$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{Z}_2^2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

へ拡張し、4種類の次数

$$(0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)$$

をもつ代数・超空間・物理系を系統的に研究している。

研究の中心課題

$\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Lie 超代数を対称性として用いることで、通常のボソン・フェルミオン二分法を越えた数理構造を構成し、超対称量子力学、可積分系、相対論的場の理論へ応用する。

次数	通常の偶奇	役割の例
(0, 0)	even	Hamiltonian, spacetime / ordinary bosonic sector
(1, 1)	even	R-charge/ extra bosonic sector
(0, 1)	odd	supercharge / fermionic sector
(1, 0)	odd	supercharge / fermionic sector

交換関係の符号はこの偶奇だけではなく、 $\mathbb{Z}_2^2$ の内積によって決定される。この点が通常の Lie 超代数との本質的な違いである。

2. $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Lie 超代数と対称性

$\Gamma = \mathbb{Z}_2^2$ とし、次数付きベクトル空間 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\mathbf{a} \in \Gamma} \mathfrak{g}_{\mathbf{a}}$ を考える。

各元 $X_{\mathbf{a}} \in \mathfrak{g}_{\mathbf{a}}, Y_{\mathbf{b}} \in \mathfrak{g}_{\mathbf{b}}$ に対して、 $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Lie 超代数の括弧は

$$[X_{\mathbf{a}}, Y_{\mathbf{b}}] = -(-1)^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} [Y_{\mathbf{b}}, X_{\mathbf{a}}], \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \pmod{2}$$

を満たす。さらに次数付き Jacobi 恒等式

$$(-1)^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}} [X_{\mathbf{a}}, [Y_{\mathbf{b}}, Z_{\mathbf{c}}]] + \text{cyclic} = 0$$

を満たす。

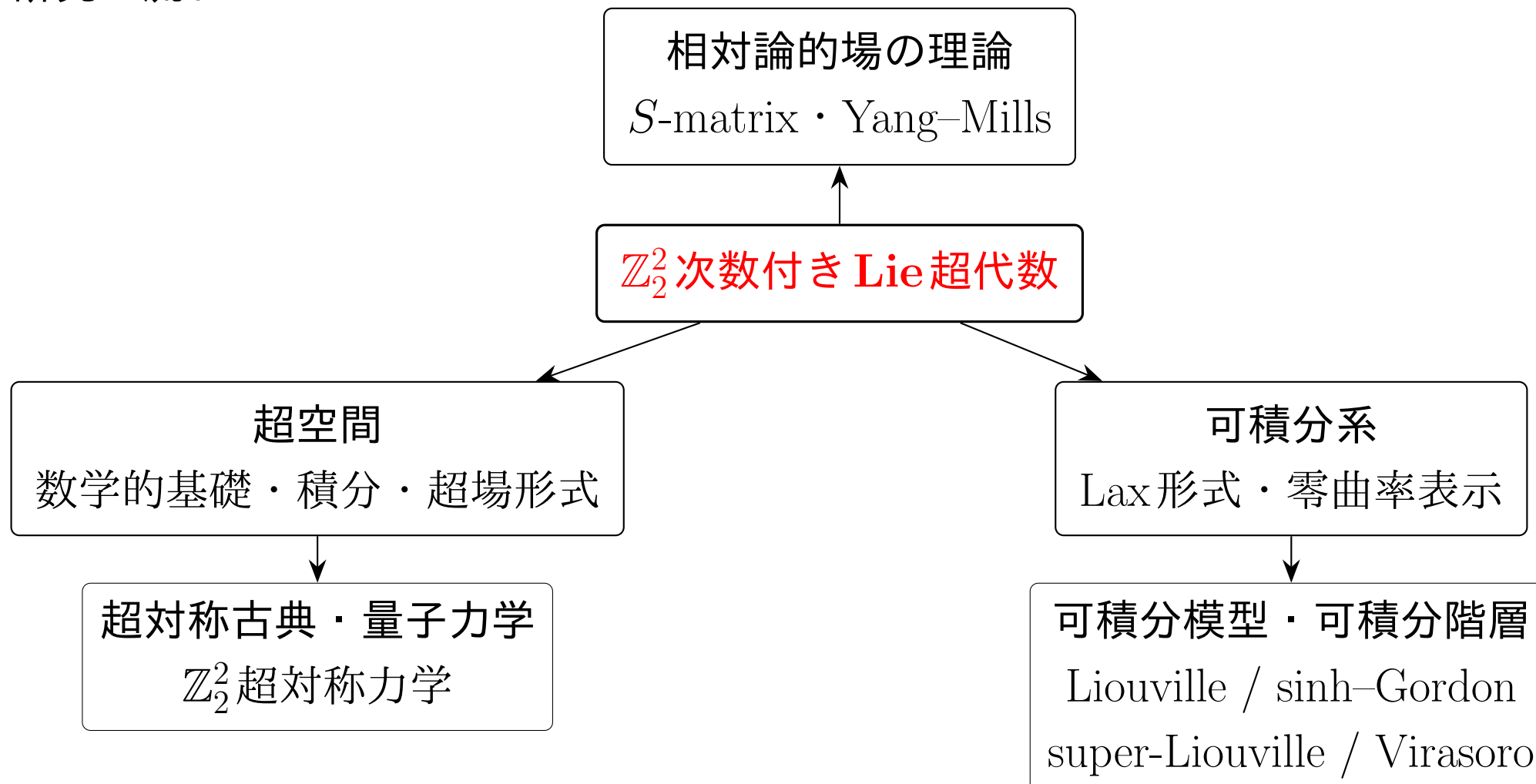
重要な特徴: 同じ “even / odd” に分類される元でも、相手の次数によって交換子型・反交換子型が変化する。したがって、 $\mathbb{Z}_2^2$ 次数は単なる2種類の超対称性の並置ではない。

例えば、2種類の超電荷を Q_{01}, Q_{10} とすると、典型的には

$$\{Q_{01}, Q_{01}\} \sim H, \quad \{Q_{10}, Q_{10}\} \sim H, \quad [Q_{01}, Q_{10}] \sim Z_{11}$$

のように、(1, 1) 次数の生成子 Z_{11} が自然に現れる。

研究の流れ



3. これまでの成果

(i) $\mathbb{Z}_2^2$ 超空間と積分

最小 $\mathbb{Z}_2^2$ 超空間上の積分を定式化し、次数付き座標から通常の時空方向が誘導される機構を明らかにした。さらに1次元超空間から2次元相対論的模型が現れる構成を与えた。

(ii) $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称量子力学

超場形式による $\mathbb{Z}_2^2$ 超対称性を構成し、次元縮約を通して $\mathcal{N} = 2$ double-graded supersymmetric quantum mechanics を具体化した。

(iii) 可積分系への応用

$\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Lie (超) 代数に基づく零曲率表示を用いて、Liouville / sinh-Gordon 理論の次数付き拡張、loop $\mathfrak{osp}(1|2)$ に付随する可積分階層、さらに $\mathbb{Z}_2^2$ super-Liouville 方程式と super-Virasoro 代数を構成した。

(iv) 相対論的量子場理論への展開

高次 $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Lie 超代数が S -matrix の対称性として許される条件を解析した。現在は、 $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Yang-Mills / supersymmetric Yang-Mills 理論、一般化統計と安定性の関係へ研究を拡張している。

4. 出版論文のまとめ

- R. Ito**, A. Nago, S. Tanigawa, “On Generalized Statistics and Stability in $\mathbb{Z}_2^2$ -Graded Supersymmetric Yang-Mills Theory”, arXiv:2604.19415 [hep-th] (2026).
- N. Aizawa, I. Fuji, **R. Ito**, T. Tanaka, F. Toppan, “Integrable $\mathbb{Z}_2^2$ -graded super-Liouville equation and induced $\mathbb{Z}_2^2$ -graded super-Virasoro algebra”, *J. Phys. A* **59**, 235202 (2026).
- N. Aizawa, I. Fuji, **R. Ito**, “An integrable hierarchy associated with loop extension of $\mathbb{Z}_2^2$ -graded $\mathfrak{osp}(1|2)$ ”, *J. Phys. A* **59**, 215206 (2026).
- R. Ito**, A. Nago, “Novel possible symmetries of S -matrix generated by $\mathbb{Z}_2^2$ -graded Lie superalgebras”, *Nucl. Phys. B* **1014**, 116877 (2025).
- N. Aizawa, **R. Ito**, Z. Kuznetsova, T. Tanaka, F. Toppan, “Integrable $\mathbb{Z}_2^2$ -graded extensions of the Liouville and sinh-Gordon theories”, *J. Phys. A* **58**, 055201 (2025).
- N. Aizawa, **R. Ito**, T. Tanaka, “ $\mathcal{N} = 2$ double graded supersymmetric quantum mechanics via dimensional reduction”, *AIMS Math.* **9**, 10494–10522 (2024).
- N. Aizawa, **R. Ito**, T. Tanaka, “ $\mathbb{Z}_2^2$ -graded supersymmetry via superfield on minimal $\mathbb{Z}_2^2$ -superspace”, *J. Phys. A* **57**, 435201 (2024).
- N. Aizawa, **R. Ito**, “Integration on minimal $\mathbb{Z}_2^2$ -superspace and emergence of space”, *J. Phys. A* **56**, 485201 (2023).
- N. Aizawa, **R. Ito**, Z. Kuznetsova, F. Toppan, “New aspects of the $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -graded 1D superspace: induced strings and 2D relativistic models”, *Nucl. Phys. B* **991**, 116202 (2023).

5. 結論と展望

結論

$\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き対称性は、通常の超対称性を包含しながら、(1, 1) 次数を含む新しい交換関係と表現を許す。これまでに、 $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Lie 超代数を基礎として、超空間と超対称力学、可積分系、 S -matrix 対称性へと研究を展開してきた。

今後の展望

- $\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き Yang-Mills / supersymmetric Yang-Mills 理論の量子化
- 一般化統計と Hamiltonian の安定性・ユニタリティの理解
- $\mathbb{Z}_2^2$ 可積分系の階層構造、保存則、Hamiltonian 構造の解明
- $\mathbb{Z}_2^2$ への一般化と4次元量子場理論における新しい粒子・対称性の探索

$\mathbb{Z}_2^2$ 次数付き対称性を、「代数的可能性」から「物理的に実現可能な対称性」へ。