

不変量とカンドル

甲斐 涼哉 (理学研究科数学専攻)

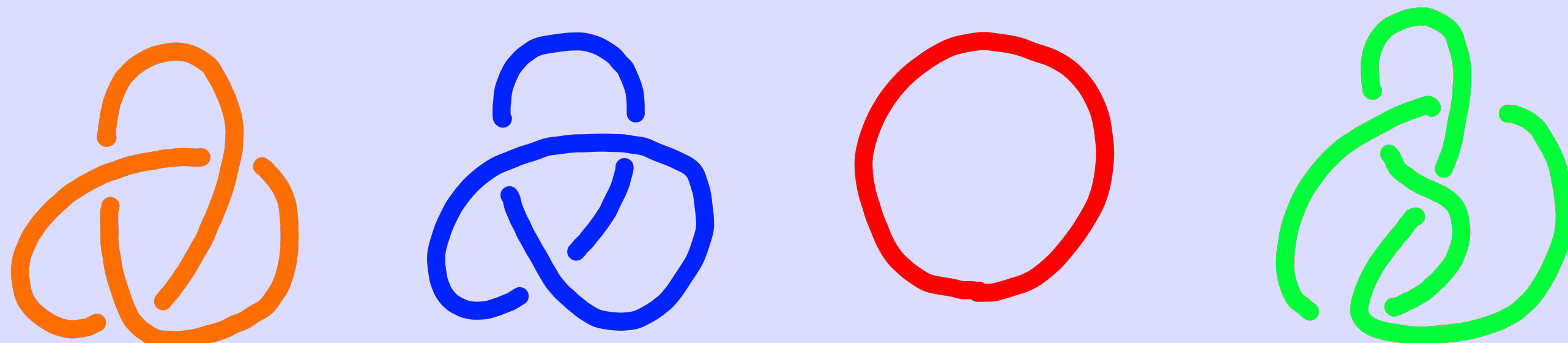
導入 ～ 分類と不変量 ～

数学的対象の分類と不変量

- ▶ 数学的対象が定義されると、その対象の同型が定義される。
 - 例 三角形には、合同や相似などの同型の基準がある。
 - 例 閉曲面は位相空間としての同相で分類されることが多い。
 - 例 代数的対象は、演算を保つ全単射が存在するとき同型とする。
- ▶ 対象 X と Y が同型ならば $I(X) = I(Y)$ を満たすような量 I を不変量。
 - 例 面積は合同類の不変量であり、相似類の不変量ではない。
 - 例 オイラー標数 ($= \#\{\text{頂点}\} - \#\{\text{辺}\} + \#\{\text{面}\} - \dots$) は、位相空間のホモトピー類の不変量である。
- ▶ 数学的対象の分類とは、その同型類を決定すること。
 - 例 三角形の合同類は辺の長さで完全に分類できる。
 - 例 閉曲面は向き付け可能性とオイラー標数で完全に分類できる。

結び目

結び目とは、3次元空間内の円周。同位な結び目を同値と定義する。



結び目の不変量として様々な概念が定義され、研究されてきた。

カンドル

次の3条件を満たす二項演算 $\triangleleft$ を持つ集合 X をカンドルという：

- Q1 $\forall x \in X, s_x(x) = x,$
Q2 $\forall x \in X, s_x : X \rightarrow X$: 全単射,
Q3 $\forall x, y \in X, s_x \circ s_y = s_{s_x(y)} \circ s_x.$

- ★ 結び目 K の基本カンドル $Q(K)$ は、強力な不変量になる。
- ★ 群の共役演算の一般化や対称空間の離散化とみなされている。

今後の展望

- ▶ 等質空間の離散部分カンドルを一般化し、カンドルの幾何学的不変量を構成する。
- ▶ カンドルの代数的性質を、幾何学的不変量の観点から研究する。

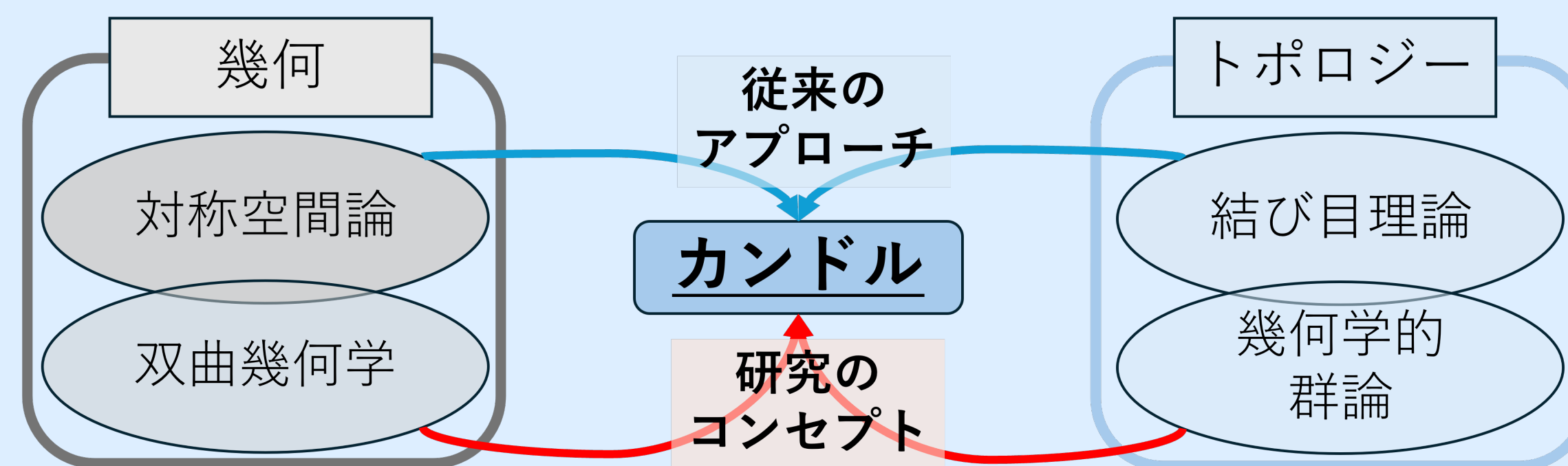
研究内容 ～ カンドルの構成と不変量 ～

背景

結び目理論や対称空間論を中心にカンドルが研究されてきた。特に、カンドルの様々な例や、カンドルの不変量をみつきたい。

コンセプト

結び目と相性の良い対称空間の双曲空間や、その幾何学を応用した幾何学的群論的なアプローチをカンドルに取り入れる。(下図参照)



得られた結果

従来のアプローチからの結果

1. 対称空間からのアプローチ
 - ▶ カンドルにオイラー標数を導入 [2]
 - ▶ Grassmann 多様体の幾何学を使って、カンドル拡大を構成 [4]
2. 結び目理論からのアプローチ
 - ▶ 結び目を使ったカンドルの埋め込み可能性の判定条件 [5]

得られた結果

1. 双曲幾何学からのアプローチ
 - ▶ Klein 群の観点からの結び目の基本カンドルを一般化 [1]
2. 幾何学的群論からのアプローチ
 - ▶ カンドルに擬等長不変量を導入 [3]

参考文献

- [1] Kai, R.: On the quandles of isometries of the hyperbolic 3-space: Geom. Dedicata 219 (2025), no. 2.
- [2] Kai, R., Tamaru, H.: On the Euler characteristics for quandles: Internat. J. Math. 36 (2025), no.11.
- [3] Iwamoto, K., Kai, R., Kodama Y.: Metrics for quandles: arXiv:2505.07535 (2025).
- [4] Kai, R., Tamaru, H.: A construction of quandle extension by oriented 2-plane Grassmannians: in preparation.
- [5] Arai, K., Kai, R.: Detecting non-embeddability into conjugation quandles by links: in preparation.