

# クイバーから得られる冪零・可解リー代数

溝口 史華 (理学研究科 数学専攻)

## 一般的な問題

与えられたリー群がいつ特別な左不変幾何構造を許容するか？

$\exists g$ : リー群  $G$  上の特別な左不変計量

- リッチ平坦
- アインシュタイン
- リッチソリトン...

$\longleftrightarrow$

リー群  $G$  の代数的性質

- 単純
- 冪零
- 可解...

## 構成

### クイバー

定義

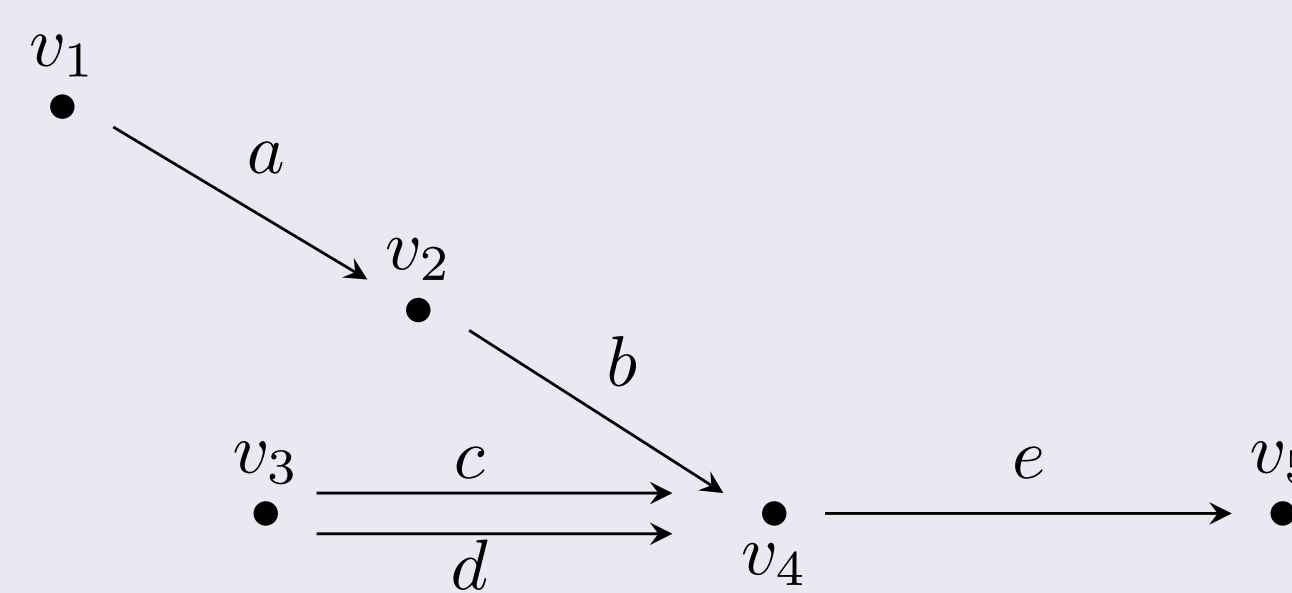
クイバー: 多重辺とループを許した有向グラフ

定義

長さ  $m$  の道: 繋がった  $m$  個の矢の列

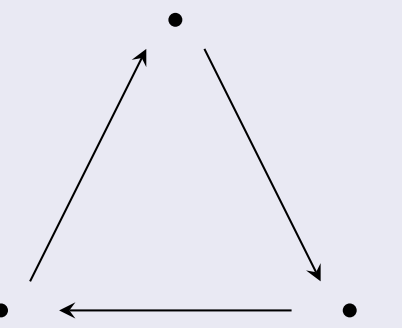
※頂点は長さ 0 の道

例



- 長さ 0:  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ,
- 長さ 1:  $a, b, c, d, e$ ,
- 長さ 2:  $ab, be, ce, de$ ,
- 長さ 3:  $abe$ .

サイクル: 始点と終点一致する道.



サイクルを含まない有限クイバーに対して, すべての道の長さの最大値が存在し, クイバーの長さという.

↓

$Q$ : クイバー,  $\text{Path}(Q)$ :  $Q$  のすべての道の集合,  $\mathfrak{s}_Q = \text{Path}(Q)$ .

道  $x, y$  に対して, 括弧積を次で定める.

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (xy \text{ が道}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

$(\mathfrak{s}_Q, [\cdot, \cdot])$  を  $Q$  から得られる **リー代数** と呼ぶ.

## 問題

$\exists \langle, \rangle$ :  $\mathfrak{n}_Q, \mathfrak{s}_Q$  上の特別な計量

$\longleftrightarrow$

$Q$  の組合せ的な性質

## 結果

定理 (M.-Tamaru, 2025 [MT])

- $Q$ : サイクルを含まない有限クイバー,
- $\mathfrak{n}_Q$ :  $Q$  から得られる冪零リー代数,
- $N_Q$ :  $\mathfrak{n}_Q$  に対応する単連結リー群.

$\Rightarrow N_Q$  は左不変リッチソリトンを許容する.

定理 (M., 2025 [M])

- $Q$ : サイクルを含まない有限クイバー,
- $\mathfrak{s}_Q$ :  $Q$  から得られる可解リー代数,
- $S_Q$ :  $\mathfrak{s}_Q$  に対応する単連結リー群.

$\Rightarrow S_Q$  は左不変リッチソリトンを許容する.

定理 (M., 2025 [M])

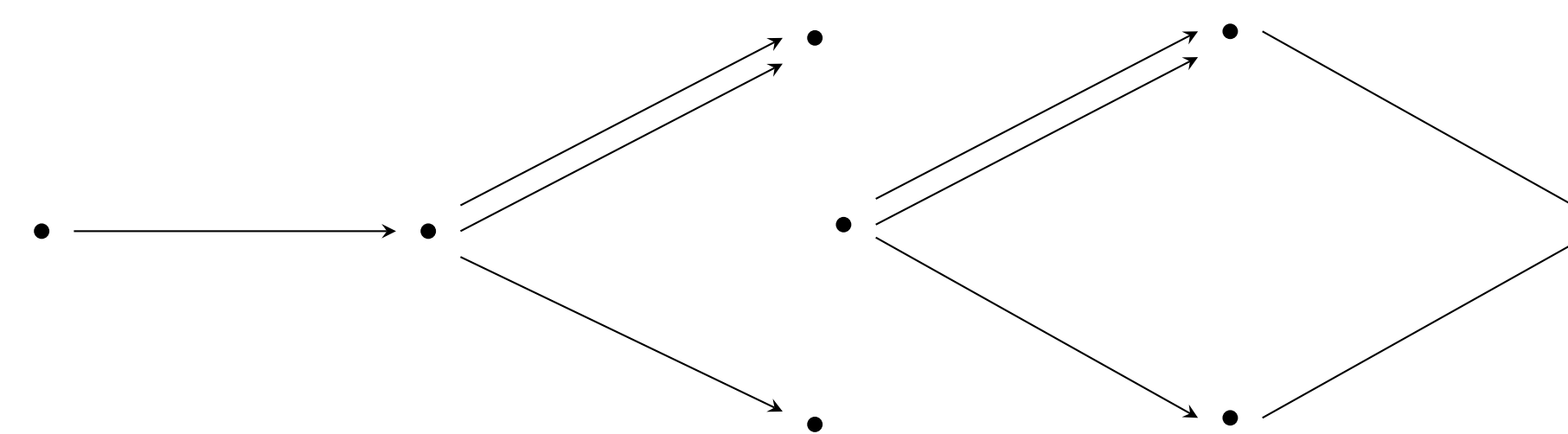
- $Q$ : 有向多重木  
(※木: サイクルを持たない連結グラフ)
- $\mathfrak{s}_Q$ :  $Q$  から得られる可解リー代数,
- $S_Q$ :  $\mathfrak{s}_Q$  に対応する単連結リー群.

このとき,  $S_Q$  は左不変計量  $\simeq (\text{flat}) \times (\text{Einstein})$  を許容する.

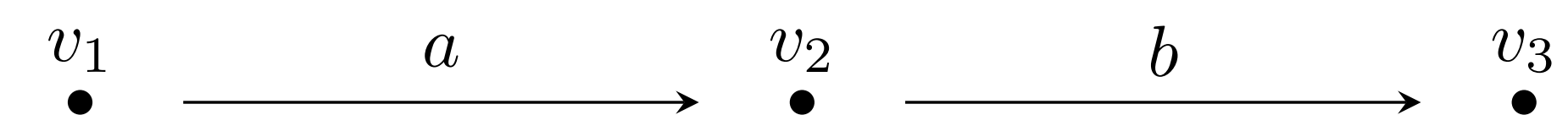
有向多重木: 向きと多重辺を無視すると木.

○

×



例



$$\mathfrak{n}_Q = \text{span}\{a, b, ab\}$$

- $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = ab$ ,
- $[a, ab] = [b, ab] = 0$ .

$$\mathfrak{n}_Q \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

↓

$$\mathfrak{s}_Q = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, a, b, ab\}$$

- $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = ab$ ,
- $[a, ab] = [b, ab] = 0$ ,
- $[v_1, a] = a, [v_2, a] = -a$  and so on.

$$\mathfrak{s}_Q \simeq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_4 & x_6 \\ 0 & x_2 & x_5 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

## 参考文献

[MT] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., “Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons”, Adv. Math. **480** (2025), 110464 [22 pp].

[M] Mizoguchi, F., “Solvable Lie algebras obtained by quivers and Einstein metrics”, in preparation.