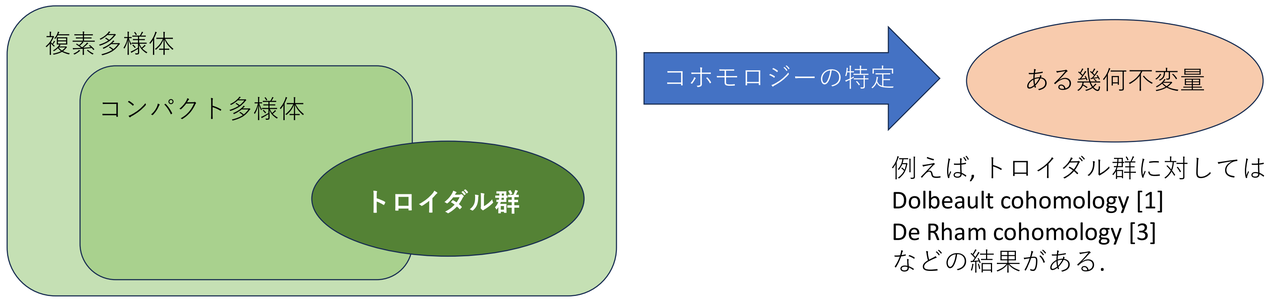
2次元トロイダル群のBott—Chern とAeppliコホモロジーについて

田中　仁一朗
(大阪公立大学 理学研究科
数学専攻 後期博士課程3年)

概要

本研究は複素多様体であるトロイダル群の構造をコホモロジーの特定により明らかにしようとする研究である．（複素）n次元複素多様体とは, 局所的に複素ユークリッド空間$\mathbb{C}^n$の中に描けるような幾何的対象のことである. トロイダル群とは, 複素トーラスの一般化であり, 大域的な正則関数として定数関数しか持たないものと定義される.



例えば, トロイダル群に対しては
Dolbeault cohomology [1]
De Rham cohomology [3]
などの結果がある.

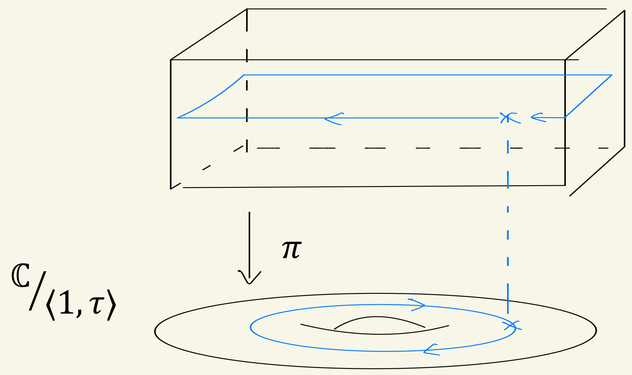
定義: Xを複素多様体とする.
Bott—Chern コホモロジーは,

$$H_{BC}^{p,q}(X) \coloneqq Ker\, d \cap \mathcal{A}^{p,q}(X)/\partial\bar{\partial}\mathcal{A}^{p-1,q-1}(X)$$

Aeppliコホモロジーは,

$$H_{A}^{p,q}(X) \coloneqq Ker\, \partial\bar{\partial} \cap \mathcal{A}^{p,q}(X)/(\partial+\bar{\partial})\mathcal{A}^{(p-1,q-1)+1}(X)$$

と定める ($p \geq 1$かつ$q \geq 1$は上記のように定める).



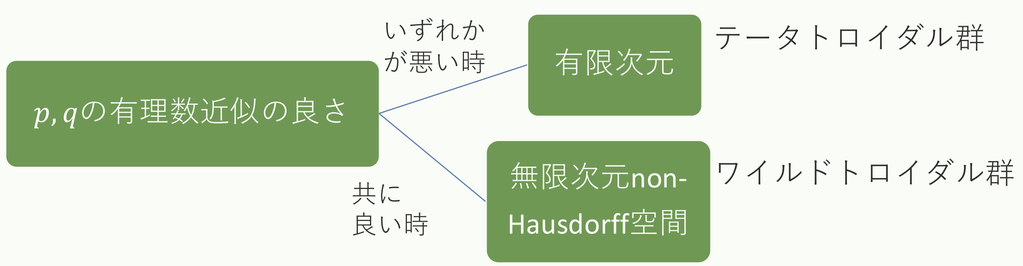
$$X = \mathbb{C}^2 \Big/ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ q \end{pmatrix} \right\rangle$$

Xは楕円曲線上の$\mathbb{C}^*$-バンドル構造をもつ.
下の楕円曲線で$+1$方向に一周すると, Xでは$\times e^{2\pi\sqrt{-1}p}$だけズレる.
同様に$+\tau$方向に一周すれば, $\times e^{2\pi\sqrt{-1}q}$だけズレる.

先行研究の結果 [1]

トロイダル群Xは, 有理数近似に関するある数論的条件によって, テータトロイダル群かワイルドトロイダル群のいずれかに分類される.

$$H^{p,q}(X, \mathcal{O}_X)$$



主定理 [2]

X : コンパクトでない2次元テータトロイダル群
定理1
Bott—Chern number $h_{BC}^{p,q} \coloneqq \dim H_{BC}^{p,q}(X)$は

$$\begin{array}{ccccc} & & h_{BC}^{0,0}=1 & & \\ & h_{BC}^{1,0}=2 & & h_{BC}^{0,1}=2 & \\ h_{BC}^{2,0}=1 & & h_{BC}^{1,1}=3 & & h_{BC}^{0,2}=1 \\ & h_{BC}^{2,1}=1 & & h_{BC}^{1,2}=1 & \\ & & h_{BC}^{2,2}=0. & & \end{array}$$

定理2
Aeppli number $h_{A}^{p,q} \coloneqq \dim H_{A}^{p,q}(X)$は

$$\begin{array}{ccccc} & & h_{A}^{0,0}=1 & & \\ & h_{A}^{\widetilde{1,0}}=1 & & h_{A}^{\widetilde{1,0}}=1 & \\ h_{A}^{2,0}=0 & & h_{A}^{\widetilde{1,0}}=4 & & h_{A}^{0,2}=0 \\ & h_{A}^{2,1}=0 & & h_{A}^{1,2}=0 & \\ & & h_{A}^{2,2}=0. & & \end{array}$$

ただし, $h_{A}^{\widetilde{p,q}}$ は$H_{A}^{p,q}(X)$のHausdorff化した空間の次元とした. このとき, $\mathcal{A}^{p,q}(X)$に係数の各導関数についての広義一様収束位相を入れ, $H_{A}^{p,q}(X)$にその商位相を入れている.

参考文献
[1] H. Kazama: $\bar{\partial}$-cohomology of (H,C)-groups, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), 297—317.
[2] J. Tanaka: On Bott—Chern and Aeppli cohomologies of 2-dimensional toroidal groups, arxiv: 2509.06384 [math.CV] (Submitted to Ann. Inst. Fourier)
[3] T. Umeno: De Rham cohomology of toroidal groups and Chern classes of the complex line bundles, Pusan Kyongnam Math J. **9** (1993), No. 2, pp. 295—311.