

BPSクイバーからSchur指数を計算する — 条件収束を避ける新しい表示 —

Shou Tanigawa¹

Takahiro Nishinaka^{1,2,3}

¹大阪公立大学大学院 理学研究科物理学専攻

²NITEP

³OCAMI

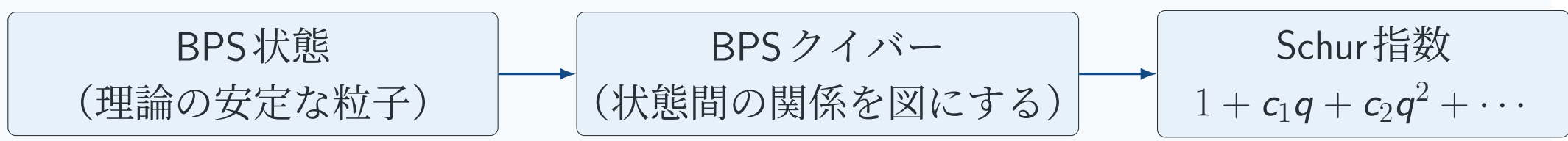
1. 何を計算したいのか？

4次元超対称量子場理論には、通常のラグランジアンを使って扱うことが難しい **Argyres–Douglas (AD) 理論** が存在する。その性質を調べる代表的な量の一つが **Schur 指数** である。

Schur 指数は、理論に含まれる「超対称性で保護された状態・演算子」を数え上げる母関数で、結果は

$$\mathcal{I}(q) = 1 + c_1 q + c_2 q^2 + c_3 q^3 + \cdots$$

のような級数として得られる。係数 c_i に理論の情報が詰まっている。

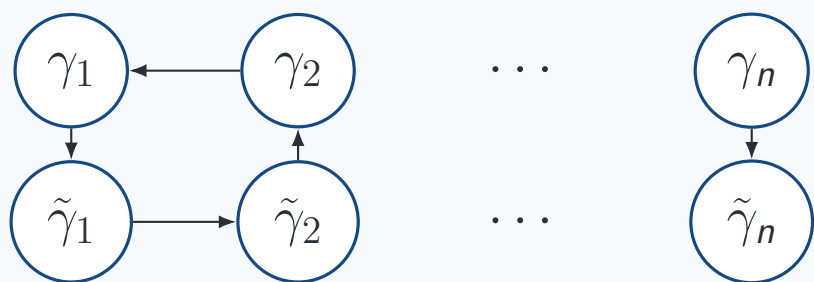


狙い：ラグランジアンを知らなくても、BPSスペクトルからSchur指数を計算したい。

2. BPSクイバーから計算できるが……

Cordova–Shao らの方法では、BPS状態を位相順に掛け合わせた量子モノドロミーからSchur指数を構成する。

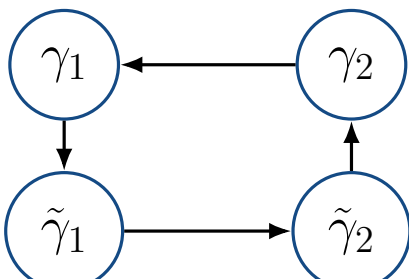
本研究で扱う (A_2, A_n) 型AD理論のBPSクイバーは、概略的に次のような「2列の鎖」として表される。



しかし、式をそのまま無限和に展開すると、**和を取る順番によって途中の振る舞いが変わる**。これは数値計算でも理論的にも扱いにくい。

3. 具体例： (A_2, A_2) で「問題」と「解決」を見る

最小の非自明な例 (A_2, A_2) では、BPSクイバーは4頂点の閉じた形になる。



従来表示の問題. 例えば $a_2 = b_2 = 0$ などの簡単な部分を取り出すと、和の中に

$$\sum_{a_1=0}^{\infty} \frac{q^{-a_1(\tilde{a}_1-2)+C}}{(q)_{a_1}^2} \quad (C: a_1 \text{ に依らない定数})$$

が現れる。 $|q| < 1$ なので $\tilde{a}_1 > 2$ では、 a_1 を大きくすると項が増大する。

最終結果は正しいが、途中の無限和は足す順序に依存する

新しい表示. 局所的な内部和を、共通部分を数える1個の整数 k にまとめると、半モノドロミーを

$$S(q) = \sum_{a_i, \tilde{a}_i \geq 0} \sum_{k=0}^{\min(a_1, a_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)} \frac{(-1)^{\sum_i (a_i + \tilde{a}_i)} q^A}{(q)_{a_1-k} (q)_{a_2-k} (q)_{\tilde{a}_1-k} (q)_{\tilde{a}_2-k} (q)_k} X \dots$$

と書き直せる。ここで

$$A = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2) - k + \frac{1}{2}[(a_1 - k)(a_2 - k) + (\tilde{a}_1 - k)(\tilde{a}_2 - k) + (a_1 - k)(\tilde{a}_1 - k) + (a_2 - k)(\tilde{a}_2 - k)].$$

分母から

$$a_1, a_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \geq k$$

が必要なので、各括弧は非負であり、

$$A \geq \frac{1}{2}(4k) - k = k \geq 0$$

となる。したがって、**新しい表示では各項が最初から q の非負べきだけを持つ**。

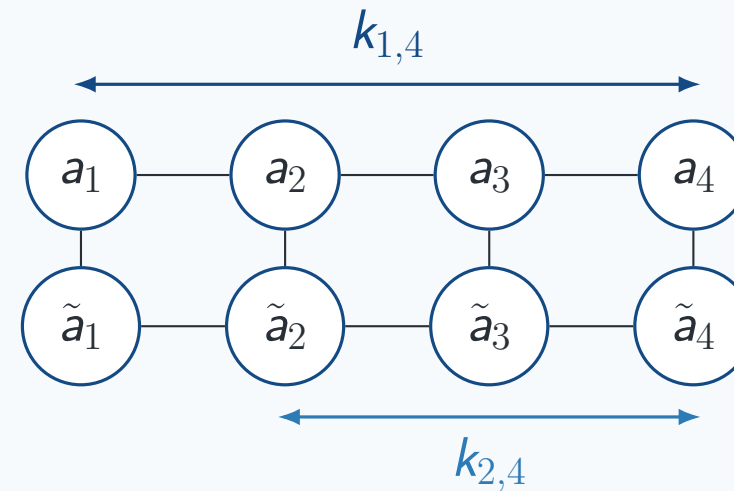
4. (A_2, A_n) への一般化

n が大きくなると、1個の k だけでは足りない。そこで、クイバー上の区間 $[L, R]$ ごとに補助変数

$$k_{L,R} \quad (1 \leq L < R \leq n)$$

を導入する。

直感的には、 $k_{L,R}$ は「 L 番目から R 番目までをまたぐ共通の寄与をひとまとめに数える変数」である。



この再構成では、各 $k_{L,R}$ がクイバー上のどの辺・頂点に効くかを整理でき、一般の (A_2, A_n) に対しても

q の指数は常に非負

であることを示せる。

5. Consistency check：既知の結果を再現するか？

新しい表示が元の理論を変えていないことを確認するため、低い n の具体例でSchur指数を展開し、既知の結果と比較した。

理論	新しい表示	比較対象
(A_2, A_2)	一致	D_4 型の既知のSchur指数
(A_2, A_3)	一致	対応する2次元CFTの指標
(A_2, A_4)	一致	対応する2次元CFTの指標
(A_2, A_5)	一致	既知のSchur指数

ポイント：単に数値的に収束させたのではなく、**式の構造そのものを、非負べきだけが現れる形へ再編成した**。

6. 考察

- ▶ 従来法の難点は「Schur指数そのもの」ではなく、**BPSデータから指数へ変換する途中の表示**にある。
- ▶ 新しい $k_{L,R}$ は、複数の内部和に散らばっていた寄与を**クイバー上の区間構造**に沿って整理している。
- ▶ その結果、収束性が式から直接読み取れ、計算機で扱う際にも自然な打ち切りが可能になる。
- ▶ BPSクイバーという離散的データと、Schur指数という級数の間にある組合せ論的構造を明示していると考えられる。

7. 結論・今後の展望

結論

- ▶ (A_2, A_n) 型AD理論のSchur指数計算に現れる条件収束の問題を明確化した。
- ▶ (A_2, A_2) の具体例から、補助変数による新しい再構成を提案した。
- ▶ 一般の (A_2, A_n) に拡張し、全ての項で q の指数が非負になることを示した。
- ▶ 複数の具体例で既知のSchur指数との一致を確認した。

今後：他のAD理論・より一般のBPSクイバーに対して、同様の「正値化された表示」が存在するかを調べる。

References

- [1] C. Córdova and S.-H. Shao, Schur indices, BPS particles, and Argyres–Douglas theories.
- [2] C. Córdova, D. Gaiotto and S.-H. Shao, Infrared computations of defect Schur indices.
- [3] D. Xie, BPS spectrum, wall crossing and quantum cluster algebras.