Z_2^2超対称代数の既約表現と超場形式

阪府大院理　土居駿也

はじめに

Lie super代数＝Z_2次数付き代数

- 交換子と反交換子で閉じる
- 各元が$Z_2 = \{0,1\}$の元を次数として持つ
- ２つの元の次数の積＝偶数→交換子
  ＝奇数→反交換子

Z_2^2次数付き代数

- $Z_2 \to Z_2^2 = Z_2 \times Z_2 = \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\}$
- 2つの元の次数の内積＝偶数→交換子
  ＝奇数→反交換子

例．$d = 1,\ \mathcal{N} = 1,\ Z_2^2$ 超対称代数 (用いる代数)

$$\{Q_{10}, Q_{10}\} = \{Q_{01}, Q_{01}\} = 2H, \quad [Q_{01}, Q_{10}] = 2iZ,$$
$$[H, Q_{10}] = [H, Q_{01}] = [H, Z] = \{Q_{10}, Z\} = \{Q_{01}, Z\} = 0.$$

H:次数(0,0), Q_{10}:次数(1,0), Q_{01}:次数(0,1), Z:次数(1,1)

研究背景

Z_2^2超対称代数と物理

- Z_2^2超対称量子力学 Bruce and Duplij(2020)
  Z_2^2 超対称代数を満たす量子力学系
- Z_2^2超対称力学 Aizawa et al.(2020)
  Z_2^2 超対称代数を満たす古典力学系
  4種類の多重項が得られる
  量子化でBruceらの量子力学系を再現出来ていない

目的

- 表現の考察→Z_2^2超対称な古典力学系の考察
- 超場形式が使えるか？
- 量子化でBruceらの量子力学系を再現する古典力学系は？

独創性

- 物理のみならず，代数，幾何学的な視点も含めた議論

Z_2^2超対称代数の既約表現

方針

- H:中心元，　Z:Z_2^2中心元 (全ての元と可換または反可換)
- $\langle H, Z\rangle$の有限次元既約表現→ 1or2次元 Amakawa et al.(2021)
- それぞれの表現→誘導表現
- 既約性の確認→ 4次元の既約表現が2つ

結果

既約表現Type1

$$H\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\dot{\phi}\\i\dot{F}\\i\dot{\psi}\\i\dot{\xi}\end{pmatrix},\quad Z\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},Q_{10}\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi\\i\dot{\xi}\\i\dot{\phi}\\F\end{pmatrix},Q_{01}\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\i\dot{\psi}\\F\\i\dot{\phi}\end{pmatrix}$$

既約表現Type2

$$H\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\dot{\phi}\\i\dot{F}\\i\dot{\psi}\\i\dot{\xi}\end{pmatrix},\quad Z\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F\\-\ddot{\phi}\\\dot{\xi}\\\dot{\psi}\end{pmatrix},Q_{10}\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi\\-\dot{\xi}\\i\dot{\phi}\\-iF\end{pmatrix},Q_{01}\begin{pmatrix}\phi\\F\\\psi\\\xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\i\dot{\psi}\\iF\\\dot{\phi}\end{pmatrix}$$

Z_2^2超場形式

Z_2^2超空間と超場 Poncin(2016) Bruce (2020)

- Z_2^2超空間： Z_2^2次数を持つ座標変数が張る空間
- Z_2^2超空間での並進の生成子= Z_2^2超対称代数をなす
- Z_2^2超場： Z_2^2超空間上の関数で，並進に対してスカラー

今回使う空間=時空1次元のZ_2^2超空間

$$\{\underbrace{t}_{(0,0)}, \underbrace{z}_{(1,1)}, \underbrace{\theta_{10}}_{(1,0)}, \underbrace{\theta_{01}}_{(0,1)}\}, \quad \Psi = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1} z^k \theta_{10}^{\alpha}\theta_{01}^{\beta} f_{k\alpha\beta}(t)$$

- $\theta_{10}^2 = \theta_{01}^2 = 0, \quad \theta_{10}\theta_{01} = \theta_{01}\theta_{10}$
- 成分場は無限個→無限次元表現
- 表現と対応させる為には有限次元に落とす必要がある

研究結果

超場への制限Type1: $f_{100} = 0$ Bruce (2020)

成分場: $k \geq 1$で$f_{k00} = f_{k10} = f_{k01} = f_{k11} = 0$

$Z = 0$の表現に対応: $f_{000} = \phi, \quad f_{010} = \psi, \quad f_{001} = \xi, \quad f_{011} = F$

作用

$$S = -\int dtdzd\theta_{10}d\theta_{01}\,(D_{10}\Psi)(D_{01}\Psi)$$
$$= \int dt(\dot{\phi}^2 + F^2 + i\psi\dot{\psi} + i\dot{\xi}\xi)$$

- Z_2^2超対称不変，先行研究の作用と一致
- Z_2^2超空間上の積分可能性が不変性を保証
- ϕ:ボゾン，ψ, ξ:フェルミオン，F:エキゾチックボゾン
- ϕ →物理的，F →補助場
- 超場のZ_2^2次数変更→異なる多重項
- (先行研究のうち2種類のみ再現)

例．(1,1)超場: ϕ →補助場，F →物理的

超場への制限Type2: $f_{011} = 0$

任意の成分場: f_{000}，f_{010}，f_{001}，f_{100}で書ける

$Z \neq 0$の表現に対応: $f_{000} = \phi, \quad f_{010} = \psi, \quad f_{001} = \xi, \quad f_{100} = iF$

作用

- Z_2^2超対称不変でない
- 超場のZ_2^2次数を変更しても不変な作用は得られない

まとめ

まとめ

- Cartan部分代数の既約表現から2つの既約表現を得た
- 超場への制限と，2つの既約表現の対応を明らかにした
- 作用が不変な表現と，不変でない表現が存在
- 作用の不変性は積分可能性によって保証
- 超場のZ_2^2次数の取り方で，得られる多重項が変わる